Proposition 2.17 (Sous-algèbre engendré par un élément). *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre, et $x \in A$. On définit*

$$\mathbb{K}[x] = \{P(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

Alors $\mathbb{K}[x]$ est une sous-algèbre commutative de A, et est minimale parmi les sous-algèbres de A contenant x. On l'appelle sous-algèbre de A engendrée par x.

Ainsi, $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble des éléments de A s'obtenant polynomialement à partir de x.

Éléments de preuve. C'est l'image par un morphisme d'algèbre d'une algèbre commutative.

En particulier, même si A n'est pas commutative, deux polynômes d'un même élément $x \in A$ commutent. □

Exemple 2.18.

1. *Pour $A = \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, le produit dans $\mathcal{L}(E)$ étant la composition, le respect du produit par S_u s'écrit :*

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

L'égalité du milieu exploite la commutativité dans $\mathbb{K}[X]$, qui permet donc d'obtenir la commutativité de l'algèbre $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$.

2. *Décrire $\mathbb{K}[M]$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

On remarque que cette propriété de commutation est un cas particulier d'un résultat un peu plus général :

Proposition 2.19 (Polynômes d'endomorphismes qui commutent). *Soit u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u)$.*

Éléments de preuve. Par manipulation de sommes, en remarquant que $u^k v^l = v^k u^k$. □

Corollaire 2.20 (Des propriétés de stabilité par commutation). *Soit u et v des endomorphismes qui commutent et P et Q des polynômes. Alors :*

1. *$\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par v;*
2. *$\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$*

Éléments de preuve. Le 1 est classique et se démontre indépendamment de ce qui précède. Le 2 consiste à appliquer le 1 aux endomorphismes $P(u)$ et $Q(v)$ qui commutent. □

3. Polynômes d'endomorphismes

3.1 Polynômes annulateurs et polynôme minimal

On rappelle que pour E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $S_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre. En particulier, c'est un morphisme d'anneaux. On en déduit la structure de son noyau.

Proposition 3.1 (Idéal des polynômes annulateurs).

- *Le noyau $\mathrm{Ker}(S_u)$ de $S_u : P \mapsto P(u)$ est un idéal, constitué de tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

- *Un polynôme vérifiant $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ est appelé polynôme annulateur de u.*

Proposition 3.2 (Existence d'un polynôme annulateur non nul en dimension finie)**.** *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u admet au moins un polynôme annulateur non nul.*

Éléments de preuve. Pour $n = \dim(E)$, la famille $(u^0, u^1, \dots, u^{n^2})$ est liée car $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$. □

Définition 3.3 (Polynôme minimal)**.** *Le polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$ est l'unique polynôme unitaire engendrant l'idéal principal Ker(S_u) des polynômes annulateurs de u. Il est souvent noté μ_u ou π_u.*

Proposition 3.4. *Base et dimension de $\mathbb{K}[u]$. $SoitE$ un espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $d = \deg(\mu_u)$. Alors*

$$\dim \mathbb{K}[u] = d,$$

et une base en est $(id, u, \dots, u^{d-1})$.

Éléments de preuve. Caractère générateur par division euclidienne. Liberté par minimalité du degré de μ_u. Ainsi, le polynôme minimal μ_u est l'unique polynôme unitaire tel que pour tout polynôme annulateur P de $u, \mu_u | P$. C'est donc aussi, parmi les polynômes annulateurs unitaires non nuls, celui dont le degré est minimal. On peut évidemment traduire ces définitions en termes matriciels. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des polynômes annulateurs de M est l'idéal Ker(S_M), non réduit à 0 car $(M^0, \dots, M^{n^2})$ est liée, et engendrée par un unique polynôme annulateur unitaire μ_M ou π_M, appelé polynôme minimal de M. Avant de voir des exemples de polynômes minimaux, on donne une définition : □

Exercice 3.5 (Une matrice circulante)**.** *Soit $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par*

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

.

Déterminer un polynôme annulateur de C_n, puis son polynôme minimal.

Définition 3.6 (Endomorphisme nilpotent)**.** *Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans ce cas, l'entier $d = \min\{k \in \mathbb{N}, u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ est appelé indice de nilpotence de u. C'est donc le plus petit entier positif tel que $u^d = 0$.*

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est toujours au moins égal à 1 (car $u^d = id$, et même à 2, sauf si $u = 0$. Cette définition s'adapte bien entendu aux matrices.

Exemple 3.7. *Les exemples suivants doivent être pris comme des exemples du cours.*

1. *Polynôme minimal de $0_{\mathcal{L}(E)}$.*
2. *Polynôme minimal d'une matrice scalaire λI_n, $\lambda \neq 0$.*

3.

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

4. *Les projecteurs sont définis algébriquement par un polynôme annulateur $X^2 - X$. À quelle condition est-ce le polynôme annulateur ?*

5. *De même, $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de toute symétrie. À quelle condition est-ce le polynôme minimal ?*

L'exemple de la matrice J_n se généralise de la sorte.

Proposition 3.8 (Caractérisation d'un endomorphisme nilpotent par son pol. min.)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) *u est nilpotente d'indice de nilpotence d;*

(ii) *$\mu_u = X^d$.*

Par ailleurs, on sait comparer le degré de μ_d à $n = \dim(E)$, dans ce cas particulier, grâce au lemme suivant.

Lemme 3.9 (Majoration de l'indice de nilpotence)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit u un endomorphisme nilpotent de E, d'indice de nilpotence d. Alors $d \leq n$.*

Éléments de preuve. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x))$ soit libre. □

Ainsi, le polynôme minimal d'un endomorphisme minimal est toujours de degré inférieur à $\dim(E)$. Ce résultat se généralisera à tout polynôme minimal plus tard, grâce au théorème de Cayley-Hamilton, qui fournit un polynôme annulateur de degré $n = \dim(E)$ (ce qui assure de facto que le polynôme minimal est de degré plus petit).

Exercice 3.10 (Sous-espaces caractéristiques)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension quelconque, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que la suite de sous-espaces vectoriels $(\mathit{Ker}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion, et la suite $(\mathit{Im}\ u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est decroissante.*

2. *Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que si $\mathit{Ker}(u^p) = \mathit{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathit{Ker}(u^k) = \mathit{Ker}(u^p)$ pour tout $k \geqslant p$. Qu'en est-il de $\mathit{Im}(u^k)$?*

   L'espace $\mathit{Ker}(u^p)$ est appele sous-espace caracteristique de u associe a la valeur (propre) 0. On peut considerer plus generalement l'espace obtenu de la sorte avec l'endomorphisme $u-\lambda\mathrm{id}$, appele, s'il est non trivial, sous-espace caracteristique associe a la valeur propre λ.

Exercice 3.11 (Théorème des noyaux itérés)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.*

1. *Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{rg}(u^k) - \mathrm{rg}(u^{k+1}) = \dim(\mathit{Ker}(u) \cap \mathit{Im}(u^k))$.*

2. *En deduire que la suite $(\dim \mathit{Ker}(u^{k+1}) - \dim \mathit{Ker}(u^k))_{k\in\mathbb{N}}$ est decroissante.*

3.2 Lemme de décomposition des noyaux

On termine cette section dédiée aux polynômes d'endomorphismes et de matrices par un résultat qui sera d'une importance capitale pour les problèmes de diagonalisation, et plus généralement de réduction. Je lui donne un statut de théorème, même s'il est communément appelé lemme.

Théorème 3.12 (Lemme de décomposition des noyaux)**.** *Soit $r \in \mathbb{N}^*$, et $P_1, \dots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors*

$$Ker(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u)).$$

Éléments de preuve. Par récurrence immédiate, la primalité 2 à 2 impliquant en particulier que P_k est premier avec $P_1 \dots P_{k-1}$, il suffit de le montrer lorsque $r = 2$. Pour $r = 2$, se servir d'une relation de Bézout, à la fois pour montrer l'inclusion directe, et pour montrer le caractère directe de la somme. □

Corollaire 3.13 (Décomposition de E issue d'un polynôme annulateur)**.** *Soit P un polynôme annulateur de u, tel que $P = P_1 \dots P_r$, où les P_i sont 2 à 2 premiers entre eux. Alors*

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} Ker(P_i(u)).$$

Exemple 3.14.

1. *Si p est un projecteur, on retrouve $E = Ker(p) \oplus Ker(p - id)$*
2. *Si s est une symétrie, on retrouve $E = Ker(s - id) \oplus Ker(s + id)$*
3. *Dans les deux exemples précédents, trouver une base B de E telle que $Mat_B(p)$ (resp. $Mat_B(s)$) soit diagonale.*

Le dernier point nous fait bien comprendre l'utilité de ce résultat dans des études de diagonalisabilité. Ainsi, on obtient par exemple le résultat important suivant (qui sera repris et complété dans le chapitre suivant) :

Théorème 3.15 (Caractérisation de la diagonalisabilité par polynômes annulateurs)**.** *Soit E de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur scindé à racines simples. Alors P est diagonalisable.*

Éléments de preuve. Par le lemme de décomposition des noyaux, puis prendre une base de chaque terme de la somme directe. C'est même une équivalence, comme on le justifiera plus tard. D'où la terminologie « caractérisation ». □