## 2.2 Spécialisation d'un polynôme

**Définition 2.13** (Spécialisation d'un polynôme sur une algèbre)**.** *Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$, décrit par*

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

*La spécialisation de $P$ en $x \in A$ est définie par*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k,$$

**Remarque 2.14.** 1. *La spécialisation $P(x)$ est bien définie, puisqu'on sait :*

- *faire des produits (donc prendre des puissances) dans $A$, y compris un produit vide (la puissance d'ordre 0), puisque $A$ est unitaire : pour tout $x \in A$, $x^0 = 1_A$;*
- *multiplier un élément de $A$ par un scalaire $a_i \in \mathbb{K}$;*
- *sommer entre eux des éléments de $A$.*

2. *Le terme « évaluation » pour désigner $P(x)$ est en général réservé au cas où $x \in \mathbb{K}$. Ainsi, on ne peut évaluer qu'en des éléments du corps de base, mais on peut spécialiser sur des objets plus complexes.*

3. *L'évaluation est un cas particulier de spécialisation, en considérant $A = \mathbb{K}$, qui est bien une algèbre.*

**Exemple 2.15.** 1. *Spécialisation en une matrice carrée : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut considérer $P(M)$.*

*Par exemple, déterminer $P(M)$ lorsque $P = 2X^2 + X + 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.*

2. *Spécialisation en un endomorphisme : si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u)$ est bien défini, et est un élément de $\mathcal{L}(E)$, les puissances qui interviennent correspondant à l'itération de la composition.*

*Par exemple si $P = 2X^2 + X + 1$, $P(u)$ est l'endomorphisme défini par :*

$$P(u)(x) = 2u^2(x) + u(x) + u^0(x) = 2u \circ u(x) + u(x) + x.$$

3. *Attention à ne pas confondre :*

   (a) *$P(u)(x)$ évaluation de l'endomorphisme $P(u)$ en $x$*

   (b) *$P(u(x))$ spécialisation du polynôme $P$ en $u(x)$ qui nous amène donc à prendre des puissances du vecteur $u(x)$, ce qui n'a de sens que si $E$ est elle-même une algèbre ; ces puissances n'ont alors aucun rapport avec des compositions de $u$ par lui-même.*

**Proposition 2.16** (Morphisme de spécialisation)**.** *Pour $x \in A$, l'application $S_x : \mathbb{K}[X] \to A$ définie par $S_x(P) = P(x)$ est un morphisme d'algèbre.*

Éléments de preuve. Le seul point un peu délicat à montrer est le respect du produit qui nécessite une petite manipulation de sommes. □

**Proposition 2.17** (Sous-algèbre engendré par un élément). *Soit $A$ une $\mathbb{K}$-algèbre, et $x \in A$. On définit*

$$\mathbb{K}[x] = \{P(x), P \in \mathbb{K}[X]\}$$

*Alors $\mathbb{K}[x]$ est une sous-algèbre commutative de $A$, et est minimale parmi les sous-algèbres de $A$ contenant $x$. On l'appelle sous-algèbre de $A$ engendrée par $x$.*

*Ainsi, $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble des éléments de $A$ s'obtenant polynomialement à partir de $x$.*

Éléments de preuve. C'est l'image par un morphisme d'algèbre d'une algèbre commutative.

En particulier, même si $A$ n'est pas commutative, deux polynômes d'un même élément $x \in A$ commutent. □

**Exemple 2.18.**

1. *Pour $A = \mathcal{L}(E)$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, le produit dans $\mathcal{L}(E)$ étant la composition, le respect du produit par $S_u$ s'écrit :*

$$P(u) \circ Q(u) = (PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u).$$

*L'égalité du milieu exploite la commutativité dans $\mathbb{K}[X]$, qui permet donc d'obtenir la commutativité de l'algèbre $(\mathbb{K}[u], +, \cdot, \circ)$.*

2. *Décrire $\mathbb{K}[M]$, où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

*On remarque que cette propriété de commutation est un cas particulier d'un résultat un peu plus général :*

**Proposition 2.19** (Polynômes d'endomorphismes qui commutent). *Soit $u$ et $v$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Soit $P$ et $Q$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors $P(u) \circ Q(v) = Q(v) \circ P(u)$.*

Éléments de preuve. Par manipulation de sommes, en remarquant que $u^k v^l = v^k u^k$. □

**Corollaire 2.20** (Des propriétés de stabilité par commutation). *Soit $u$ et $v$ des endomorphismes qui commutent et $P$ et $Q$ des polynômes. Alors :*

1. *$\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont stables par $v$;*
2. *$\mathrm{Im}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(P(u))$ sont stables par $Q(v)$*

Éléments de preuve. Le 1 est classique et se démontre indépendamment de ce qui précède. Le 2 consiste à appliquer le 1 aux endomorphismes $P(u)$ et $Q(v)$ qui commutent. □

# 3. Polynômes d'endomorphismes

## 3.1 Polynômes annulateurs et polynôme minimal

On rappelle que pour $E$ un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $S_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ est un morphisme d'algèbre. En particulier, c'est un morphisme d'anneaux. On en déduit la structure de son noyau.

**Proposition 3.1** (Idéal des polynômes annulateurs).

- *Le noyau $\mathrm{Ker}(S_u)$ de $S_u : P \mapsto P(u)$ est un idéal, constitué de tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*