Exercice 1.28 (Expression d'un déterminant par blocs)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D soit inversible et $CD = DC$. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

Théorème 1.29 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)**.** *Soit T une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les A_k sont des matrices carrées. Alors

$$det(T) = det(A_1) \cdots det(A_k).$$

Éléments de preuve. Par récurrence, se ramener au cas $n = 2$, pour lequel on peut décomposer

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

puis utiliser le lemme 8.1.24. □

Exemple 1.30. *Exprimer $det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ en fonction de $det(A - B)$ et $det(A + B)$.*

Exercice 1.31 (Formule de Williamson)**.** *Soit $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant 2 à 2, et A la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ dont le découpage par blocs de taille $n \times n$ est donné par les $(A_{i,j})$. Soit $B = \sum_{\sigma \in \Theta_m} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} A_{\sigma(i),i}$. Montrer que $\det(A) = \det(B)$. On pourra construire une récurrence en supposant dans un premier temps que $A_{m,m}$ est inversible.*

2. Algèbres

2.1 Définitions générales

Soit K un corps quelconque.

Définition 2.1 (Algèbre)**.** *Soit $(A, +, \cdot, \times)$ un ensemble muni de 2 l.c.i. $+$ et $\times$ et d'une l.c.e. $\cdot$ sur le corps K. On dit que A est une algèbre sur K si :*

(i) *$(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K*

(ii) *$(A, +, \times)$ est un anneau*

(iii) *Pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$, $(\lambda \cdot x) \times y = \lambda \cdot (x \times y) = x \times (\lambda \cdot x)$.*

Remarque 2.2. *1. En particulier, une algèbre est unitaire, dans le sens où elle possède un neutre multiplicatif. Dans certains ouvrages plus généraux, ce n'est pas toujours le cas. Se méfier.*

2. *La définition est redondante, puisque certaines propriétés de $+$ se retrouvent à la fois dans la structure d'anneau et dans la structure d'espace vectoriel*

3. *Pour éviter ces redondances, on peut définir une algèbre comme un K-ev enrichi d'une multiplication $\times$ associative, unitaire, et bilinéaire. La bilinéarité englobe à la fois les propriétés de distributivité et la propriété (iii).*

4. *Les signes opératoires $\times$ et $\cdot$ sont souvent omis. Il n'y a pas de confusion possible entre les deux, puisque l'une des deux lois implique des scalaires et pas l'autre. L'examen de la nature des objets en jeu permet donc de lever toute ambiguïté.*

Exemple 2.3. 1. *$(\mathbb{K}, +, \cdot, \cdot)$ est une K-algèbre (le produit externe et le produit interne sont ici égaux).*

2. *$\mathbb{K}[X]$ est une K-algèbre.*

3. *$\mathbb{K}[X, Y]$ (combinaison linéaire de monômes $X^i Y^j$) aussi.*

4. *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une K-algèbre*

5. *Si E est un K-ev, $\mathcal{L}(E)$ est une K-algèbre.*

6. *$\mathbb{K}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est une K-algèbre.*

7. *C est une R-algèbre.*

8. *Soit $a \in \mathbb{R}$, et $\mathbb{Q}[a] = \{P(a), P \in \mathbb{Q}[X]\}$. Alors $\mathbb{Q}[a]$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre.*

Définition 2.4 (Sous-algèbre)**.** *Une sous-algèbre B d'une algèbre A est un sous-ensemble $B \subset A$ tel que :*

(i) *B soit stable par les 3 lois de A*

(ii) *$1_A \in B$*

(iii) *La restriction à B des lois de A définit sur B une structure d'algèbre.*

Proposition 2.5 (Reformulation de la définition des sous-algèbres)**.** *Ainsi, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une sous-algèbre de A;*

(ii) *B est un sous-espace vectoriel de A, stable par x et vérifiant $1_A \in B$*

(iii) *B est un sous-anneau de A stable par combinaison linéaire.*

Éléments de preuve. Comme toujours dans ce type de propriété, une fois la stabilité acquise, toutes les propriétés universelles sont préservées par restriction. Il faut juste s'assurer des propriétés existentielles. □

Corollaire 2.6 (Caractérisation des sous-algèbres)**.** *B est une sous-algèbre de A si et seulement si :*

(i) *$B \subset A$*

(ii) $1_A \in B$

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{K} \times B \times B, \lambda x = y \in B$

(iv) $\forall (x,y) \in B \times B, xy \in B$

Exercice 2.7 (Des sous-algèbres de l'algèbre des fonctions continues)**.** *Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de* $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemple 2.8.
1. $\mathbb{K}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{K}[X]$ *(le corps* $\mathbb{K}$ *étant identifié aux polynômes constants).*
2. *Plus généralement, si* A *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre,* $\mathbb{K} \cdot 1_A = Vect(1_A)$ *est une sous-algèbre de* A*.*
3. $\mathbb{K}[X]$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{K}[X,Y]$*.*
4. *L'ensemble* $D_n(\mathbb{K})$ *des matrices diagonales est une sous-algèbre de* $M_n(\mathbb{K})$*.*
5. *De même,* $T_n^+(\mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $M_n(\mathbb{K})$*.*
6. $T_n^{++}(\mathbb{K})$ *(matrices strictement triangulaires supérieures) est-elle une sous-algèbre de* $M_n(\mathbb{K})$*.*

Exercice 2.9 (Centrale, stabilité d'une sous-algèbre par inversion)**.** *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* A *une sous-algèbre de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On suppose que* $M \in \mathcal{A}$ *est une matrice inversible. Montrer que* $M^{-1} \in \mathcal{A}$*.*

Définition 2.10 (Morphisme d'algèbre)**.** *Soit* $(A,+,\cdot,\times)$ *et* $(B,+,\cdot,\times)$ *deux algèbres. Un morphisme d'algèbre est une application* $f \in \mathcal{F}(A,B)$ *telle que :*

(i) f *est une application linéaire de* $(A,+,\cdot)$ *dans* $(B,+,\cdot)$*;*

(ii) f *est un morphisme d'anneaux de* $(A,+,\cdot)$ *dans* $(B,+,\cdot)$*.*

Un isomorphisme d'algèbre est un morphisme d'algèbre bijectif.

Ainsi, en notant 1_A *et* 1_B *les neutres multiplicatifs respectifs de* A *et* B*,* f *est un morphisme d'algèbre si et seulement si :*

- $\forall (\lambda,x,y) \in \mathbb{K} \times A \times A,\ f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$
- $\forall (x,y) \in A^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$
- $f(1_A) = 1_B$*.*

Exemple 2.11.
1. $\mathbb{K} \cdot 1_A$ *est isomorphe à* $\mathbb{K}$*.*
2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{C}$ *définie par* $f(P) = P(i)$ *est un morphisme d'algèbre.*
3. *Plus généralement pour* $a \in \mathbb{K}$*, l'évaluation* $ev_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ *définie par* $ev_a(P) = P(a)$ *est un morphisme d'algèbre.*
4. *Si* a *est transcendant (i.e. non racine d'un polynôme de* $\mathbb{Q}[X]$*), alors* $\mathbb{Q}[a]$ *est isomorphe à* $\mathbb{Q}[X]$*.*

Proposition 2.12 (Image d'une sous-algèbre)**.** *Soit* $f : A \to B$ *un morphisme d'algèbre, et* A' *une sous-algèbre de* A*. Alors* $f(A')$ *est une sous-algèbre de* B*.*

2.2 Spécialisation d'un polynôme

Définition 2.13 (Spécialisation d'un polynôme sur une algèbre)**.** *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre, et soit $P \in \mathbb{K}[X]$, décrit par*

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k.$$

La spécialisation de P en $x \in A$ est définie par

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k,$$

Remarque 2.14. 1. *La spécialisation $P(x)$ est bien définie, puisqu'on sait :*

- *faire des produits (donc prendre des puissances) dans A, y compris un produit vide (la puissance d'ordre 0), puisque A est unitaire : pour tout $x \in A$, $x^0 = 1_A$;*
- *multiplier un élément de A par un scalaire $a_i \in \mathbb{K}$;*
- *sommer entre eux des éléments de A.*

2. *Le terme « évaluation » pour désigner $P(x)$ est en général réservé au cas où $x \in \mathbb{K}$. Ainsi, on ne peut évaluer qu'en des éléments du corps de base, mais on peut spécialiser sur des objets plus complexes.*

3. *L'évaluation est un cas particulier de spécialisation, en considérant $A = \mathbb{K}$, qui est bien une algèbre.*

Exemple 2.15. 1. *Spécialisation en une matrice carrée : si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut considérer $P(M)$.*

Par exemple, déterminer $P(M)$ lorsque $P = 2X^2 + X + 1$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. *Spécialisation en un endomorphisme : si $u \in \mathcal{L}(E)$, $P(u)$ est bien défini, et est un élément de $\mathcal{L}(E)$, les puissances qui interviennent correspondant à l'itération de la composition.*

Par exemple si $P = 2X^2 + X + 1$, $P(u)$ est l'endomorphisme défini par :

$$P(u)(x) = 2u^2(x) + u(x) + u^0(x) = 2u \circ u(x) + u(x) + x.$$

3. *Attention à ne pas confondre :*

   (a) *$P(u)(x)$ évaluation de l'endomorphisme $P(u)$ en x*

   (b) *$P(u(x))$ spécialisation du polynôme P en $u(x)$ qui nous amène donc à prendre des puissances du vecteur $u(x)$, ce qui n'a de sens que si E est elle-même une algèbre ; ces puissances n'ont alors aucun rapport avec des compositions de u par lui-même.*

Proposition 2.16 (Morphisme de spécialisation)**.** *Pour $x \in A$, l'application $S_x : \mathbb{K}[X] \to A$ définie par $S_x(P) = P(x)$ est un morphisme d'algèbre.*

Éléments de preuve. Le seul point un peu délicat à montrer est le respect du produit qui nécessite une petite manipulation de sommes. □