1.4 Déterminants par blocs

Le but de ce paragraphe est de donner quelques outils supplémentaires sur le calcul des déterminants, notamment lorsqu'on dispose d'un découpage par blocs de la matrice. En règle générale, on ne peut pas exploiter un découpage quelconque. Mais certaines manipulations sont permises.

Définition 1.23 (Transvection par blocs)**.** *Soit $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]}$ une représentation de A par blocs matriciels $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{m_i,n_j}(\mathbb{K})$. Soit $T \in \mathcal{M}_{m_i,m_k}(\mathbb{K})$. Pour $i \neq k$, la transvection $L_i \leftarrow L_i + TL_k$ consiste à remplacer les $A_{i,j}$ de la ligne L_i par $A_{i,j} + TA_{k,j}$.*

La ligne L_i correspond évidemment à la i-lème ligne (matricielle) du découpage par blocs.

Proposition 1.24 (Interprétation matricielle d'une transvection par blocs)**.** *La transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + TL_k$ correspond à la multiplication à gauche par la matrice*

$$E_{i,k,T} = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & T & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}$$

les blocs diagonaux étant triangulaires, et les blocs étant de taille compatible avec ceux de A pour effectuer le produit.

Éléments de preuve. C'est la même chose que dans le cas scalaire, à adapter grâce aux règles de produit matriciel par blocs. □

Corollaire 1.25 (Invariance du déterminant par transvection par blocs)**.** *Soit B la matrice obtenue de A par transvection $L_i \leq L_i + TL_k$. Alors det(A) = det(B).*

Éléments de preuve. En effet, la matrice $E_{i,k,T}$ est triangulaire (vraiment, pas seulement par blocs), de coefficients diagonaux tous égaux à 1. □

Lemme 1.26. *1. $\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \det(B)$*

2. $\det \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(B)$

Éléments de preuve. 1. Une transvection fait sauter C, puis faire des développements suivant des colonnes pour se débarrasser du I.

2. Transposer.

□

Exercice 1.27 (Déterminants par blocs)**.** *Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B) \quad \textit{et} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$$

Exercice 1.28 (Expression d'un déterminant par blocs)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A, B, C, D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que D soit inversible et $CD = DC$. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC).$$

Théorème 1.29 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)**.** *Soit T une matrice triangulaire par blocs, c'est-à-dire de la forme*

$$T = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où les A_k sont des matrices carrées. Alors

$$det(T) = det(A_1) \cdots det(A_k).$$

Éléments de preuve. Par récurrence, se ramener au cas $n = 2$, pour lequel on peut décomposer

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

puis utiliser le lemme 8.1.24. □

Exemple 1.30. *Exprimer $det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ en fonction de $det(A - B)$ et $det(A + B)$.*

Exercice 1.31 (Formule de Williamson)**.** *Soit $(A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ commutant 2 à 2, et A la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{C})$ dont le découpage par blocs de taille $n \times n$ est donné par les $(A_{i,j})$. Soit $B = \sum_{\sigma \in \Theta_m} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{m} A_{\sigma(i),i}$. Montrer que $\det(A) = \det(B)$. On pourra construire une récurrence en supposant dans un premier temps que $A_{m,m}$ est inversible.*

2. Algèbres

2.1 Définitions générales

Soit K un corps quelconque.

Définition 2.1 (Algèbre)**.** *Soit $(A, +, \cdot, \times)$ un ensemble muni de 2 l.c.i. $+$ et $\times$ et d'une l.c.e. $\cdot$ sur le corps K. On dit que A est une algèbre sur K si :*

(i) *$(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur K*

(ii) *$(A, +, \times)$ est un anneau*

(iii) *Pour tout $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$, $(\lambda \cdot x) \times y = \lambda \cdot (x \times y) = x \times (\lambda \cdot x)$.*

Remarque 2.2. *1. En particulier, une algèbre est unitaire, dans le sens où elle possède un neutre multiplicatif. Dans certains ouvrages plus généraux, ce n'est pas toujours le cas. Se méfier.*