1.3 Calcul matriciel par blocs

Les descriptions précédentes vont permettre d'établir assez facilement (disons que le plus dur est fait...) les règles de calcul matriciel par blocs.

Définition 1.17 (Découpages par blocs de tailles compatibles)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ deux matrices, munis de découpages par blocs*

$$A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]} \quad \textit{et} \quad B = (B_{j,k})_{(j,k)\in[1,n]\times[1,p]}.$$

On dira que les deux découpages par blocs ont des tailles compatibles si pour tout $j \in [1,n]$, le nombre de colonnes des $A_{i,j}$ est égal au nombre de lignes des $B_{j,k}$.

Remarque 1.18.

1. *Attention, on ne peut pas permuter A et B dans cette définition.*
2. *Cette condition permet de considérer, pour tout $j \in [1,n]$, le produit $A_{i,j}B_{j,k}$. De plus, le format de cette matrice ne dépend pas de j. Ainsi, la matrice suivante est bien définie :*
$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,k}.$$
3. *D'un point de vue vectoriel, si A et B sont interprétés comme des matrices d'applications linéaires $u \in L(F,G)$ et $v \in L(E,F)$ respectivement, relativement à des bases B, C et D, les découpages par blocs définissent des décompositions en somme directe de E, F et G. La compatibilité des tailles des blocs dit simplement que les blocs de A et B définissent la même décomposition en somme directe de F.*

Théorème 1.19 (Produit matriciel par blocs)**.** *Soit $A \in M_{q,r}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{r,s}(\mathbb{K})$ deux matrices, munis de découpages par blocs*

$$A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]} \quad \textit{et} \quad B = (B_{j,k})_{(j,k)\in[1,n]\times[1,p]}$$

de tailles compatibles. Alors le produit AB peut se calculer par blocs :

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,k}\right)_{(i,k)\in[1,m]\times[1,p]}.$$

Éléments de preuve. La démonstration n'est pas exigible.

Considérer $u \in L(F,G)$ et $v \in L(E,F)$ des endomorphismes associés à A et B, avec des décompositions en somme directe associées de E, F et G, de projections respectives π_k, ρ_j et σ_i. Décomposer

$$\pi_k \circ u \circ v \circ \sigma_i = \sum_j \pi_k \circ u \circ \rho_j \circ \rho_j \circ v \circ \sigma_i$$

et utiliser les résultats du paragraphe précédent. □

Ainsi, le produit matriciel par blocs suit les mêmes règles que le produit matriciel sur les coefficients, en remplaçant les coefficients par des blocs matriciels. Il faut juste pour cela que les tailles soient compatibles pour former les produits.

Corollaire 1.20 (Puissances de matrices triangulaires par blocs)**.** *Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ découpée en blocs $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, de tailles compatibles pour former le produit $A \times A$ (autrement dit, les regroupements de lignes ont la même taille que les regroupements de colonnes, ce qui équivaut à dire que les blocs diagonaux sont carrés).*

1. *On dit que A est triangulaire (supérieure) par blocs si pour tout $i > j$, $A_{i,j} = 0$, donc*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{q,q} \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est aussi triangulaire par blocs, avec des blocs de même taille que A, et

$$A^n = \begin{pmatrix} A_{1,1}^n & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

2. *On dit que A est diagonale par blocs si pour tout $i \neq j$, $A_{i,j} = 0$, donc*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{q,q} \end{pmatrix}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est aussi diagonale par blocs, avec des blocs de même taille que A, et

$$A^n = \begin{pmatrix} A_{1,1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_{q,q}^n \end{pmatrix}$$

Éléments de preuve. Comme pour les matrices exprimées avec des coefficients scalaires. Inutile de refaire. □

Exemple 1.21. *Calcul des puissances successives de*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.22 (Matrices diagonales par blocs à blocs diagonaux semblables)**.** *Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonales par blocs. On suppose que les blocs diagonaux de A et de B sont en même nombre. On note (dans l'ordre) $A_1, \ldots, A_k$ les blocs diagonaux de A et $B_1, \ldots, B_k$ ceux de B, et on suppose que pour tout $i \in [1, k]$, A_i est de même taille que B_i, et semblable à cette dernière. Montrer que A et B sont semblables.*

1.4 Déterminants par blocs

Le but de ce paragraphe est de donner quelques outils supplémentaires sur le calcul des déterminants, notamment lorsqu'on dispose d'un découpage par blocs de la matrice. En règle générale, on ne peut pas exploiter un découpage quelconque. Mais certaines manipulations sont permises.

Définition 1.23 (Transvection par blocs)**.** *Soit $A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]}$ une représentation de A par blocs matriciels $A_{i,j} \in \mathcal{M}_{m_i,n_j}(\mathbb{K})$. Soit $T \in \mathcal{M}_{m_i,m_k}(\mathbb{K})$. Pour $i \neq k$, la transvection $L_i \leftarrow L_i + TL_k$ consiste à remplacer les $A_{i,j}$ de la ligne L_i par $A_{i,j} + TA_{k,j}$.*

La ligne L_i correspond évidemment à la i-lème ligne (matricielle) du découpage par blocs.

Proposition 1.24 (Interprétation matricielle d'une transvection par blocs)**.** *La transvection par blocs $L_i \leftarrow L_i + TL_k$ correspond à la multiplication à gauche par la matrice*

$$E_{i,k,T} = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & T & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{pmatrix}$$

les blocs diagonaux étant triangulaires, et les blocs étant de taille compatible avec ceux de A pour effectuer le produit.

Éléments de preuve. C'est la même chose que dans le cas scalaire, à adapter grâce aux règles de produit matriciel par blocs. □

Corollaire 1.25 (Invariance du déterminant par transvection par blocs)**.** *Soit B la matrice obtenue de A par transvection $L_i \leq L_i + TL_k$. Alors det(A) = det(B).*

Éléments de preuve. En effet, la matrice $E_{i,k,T}$ est triangulaire (vraiment, pas seulement par blocs), de coefficients diagonaux tous égaux à 1. □

Lemme 1.26. *1. $\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = \det(B)$*

2. $\det \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(B)$

Éléments de preuve. 1. Une transvection fait sauter C, puis faire des développements suivant des colonnes pour se débarrasser du I.

2. Transposer.

□

Exercice 1.27 (Déterminants par blocs)**.** *Soit A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B)\det(A-B) \quad \textit{et} \quad \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB)$$