2. *Les π_i vérifient :*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = id_E \quad \textit{et} \quad \forall (i,j) \in [1,n]^2 \quad \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}.$$

On peut montrer que réciproquement, si $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ sont des projecteurs vérifiant le point 2, leurs images forment une décomposition de E en somme directe dont ils sont les projecteurs associés.

1.2 Détermination d'une application linéaire

Vous avez déjà vu l'année dernière qu'une application linéaire se détermine entièrement et sans ambiguïté par l'image des vecteurs d'une base. C'est cette représentation qui donne lieu ensuite aux interprétations matricielles : la matrice d'une application linéaire u détermine entièrement u, justement car elle décrit l'image d'une base.

Nous allons donner une version un peu plus générale de ce résultat, en montrant qu'une application linéaire est déterminée par ses restrictions à des sous-espaces formant une décomposition de E en somme directe. En considérant une décomposition de E en somme directe de droites engendrées par les vecteurs d'une base, on retrouve plus ou moins le théorème de détermination d'une AL sur une base, pouvant ainsi considérer que nous avons généralisé ce résultat.

Proposition 1.12 (Détermination d'une AL sur une décomposition en somme directe)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $E = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$ une décomposition de E en somme directe, et pour tout $j \in [1,n]$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$. Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $j \in [1,n]$, $u|_{E_j} = u_j$.*

Éléments de preuve. Une analyse synthèse sans difficulté. □

Proposition 1.13 (Interprétation matricielle de la détermination sur une $\bigoplus$)**.** *Soit $E = \bigoplus_{i=j}^{n} E_j$ et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On note, pour $i \in [1,n]$, $p_j = \dim E_j$, $p = \dim E$ et $q = \dim F$. On se donne $B_1, \dots, B_n$ des bases de $E_1, \dots, E_n$, C une base de F, et on définit $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$, base adaptée à la décomposition de E en somme directe.*

1. *Soit pour tout $j \in [1,n]$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$, et $A_j = Mat_{B_i,C}(u_j) \in \mathcal{M}_{q,p_j}(\mathbb{K})$. Alors l'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec chacun des u_j est l'application déterminée par la matrice*

$$Mat_{B,C}(u) = (Mat_{B_1,C}(u_1) \quad Mat_{B_2,C}(u_2) \quad \cdots \quad Mat_{B_n,C}(u_n)) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}),$$

   c'est-à-dire la matrice obtenue en juxtaposant dans une même grande matrice les matrices des u_i dans l'ordre.

2. *Réciproquement, pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et une décomposition en blocs*

$$Mat_{B,C}(u) = (A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n),$$

   où pour tout $j \in [1,n]$, $A_j \in \mathcal{M}_{q,p_j}$, alors

$$A_j = Mat_{B_j,F}(u|_{E_j}).$$

3. *En particulier, pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, avec les notations précédentes,*

$$\mathit{Mat}_{B,C}(u \circ \pi_j) = \begin{pmatrix} 0_{q,p_1} & \cdots & 0_{q,p_{j-1}} & A_j & 0_{q,p_{j+1}} & \cdots & 0_{q,p_n} \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse maintenant au problème dual, lorsque $F = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ admet une décomposition en somme directe.

Proposition 1.14 (Interprétation matricielle d'une décomposition en $\oplus$ à l'arrivée)**.** *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, et $F = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ une décomposition de F en somme directe. Soit pour tout $i \in [1,m]$ une base C_i de F_i, et $C = C_1 \sim \cdots \sim C_m$ la base de F correspondante, adaptée à la décomposition. Soit B une base de E. Alors*

$$\mathit{Mat}_{B,C}(u) = \begin{pmatrix} M_{B,C_1}(u) \\ \vdots \\ M_{B,C_m}(u) \end{pmatrix}.$$

De plus, on a alors, pour tout $i \in [1,m]$

$$\mathit{Mat}_{B,C}(\rho_i \circ u) = \begin{pmatrix} 0_{q_1,p} \\ \vdots \\ 0_{q_{i-1},p} \\ M_{B,C_i}(u) \\ 0_{q_{i+1},p} \\ \vdots \\ 0_{q_m,p} \end{pmatrix}$$

Définition 1.15 (Décomposition en blocs d'une matrice)**.** *On appellera décomposition (ou découpage) par blocs d'une matrice A une représentation de A dans laquelle on a regroupé certaines lignes consécutives ou colonnes consécutives de sorte à former des sous-matrices, vérifiant les conditions du 3 du théorème 8.1.13*

Corollaire 1.16 (Décomposition de E stable par u)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et une décomposition en somme directe :*

$$E = \bigoplus_{j=1}^n E_j.$$

Soit pour tout $i \in [1,n]$, B_i une base de E_i, et $B = B_1 \sim \cdots \sim B_n$ une base adaptée. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $i \in [1,n]$, E_i est stable par u. Alors

$$\mathit{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \mathit{Mat}_{B_1}(u_{E_1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathit{Mat}_{B_n}(u_{E_n}) \end{pmatrix},$$

où $u_{E_i} = iu_i$ est l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E_i)$ induit par u.

Une telle matrice est appelée matrice diagonale par blocs.

1.3 Calcul matriciel par blocs

Les descriptions précédentes vont permettre d'établir assez facilement (disons que le plus dur est fait...) les règles de calcul matriciel par blocs.

Définition 1.17 (Découpages par blocs de tailles compatibles)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{r,s}(\mathbb{K})$ deux matrices, munis de découpages par blocs*

$$A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]} \quad \textit{et} \quad B = (B_{j,k})_{(j,k)\in[1,n]\times[1,p]}.$$

On dira que les deux découpages par blocs ont des tailles compatibles si pour tout $j \in [1,n]$, le nombre de colonnes des $A_{i,j}$ est égal au nombre de lignes des $B_{j,k}$.

Remarque 1.18.

1. *Attention, on ne peut pas permuter A et B dans cette définition.*
2. *Cette condition permet de considérer, pour tout $j \in [1,n]$, le produit $A_{i,j}B_{j,k}$. De plus, le format de cette matrice ne dépend pas de j. Ainsi, la matrice suivante est bien définie :*
$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,k}.$$
3. *D'un point de vue vectoriel, si A et B sont interprétés comme des matrices d'applications linéaires $u \in L(F,G)$ et $v \in L(E,F)$ respectivement, relativement à des bases B, C et D, les découpages par blocs définissent des décompositions en somme directe de E, F et G. La compatibilité des tailles des blocs dit simplement que les blocs de A et B définissent la même décomposition en somme directe de F.*

Théorème 1.19 (Produit matriciel par blocs)**.** *Soit $A \in M_{q,r}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{r,s}(\mathbb{K})$ deux matrices, munis de découpages par blocs*

$$A = (A_{i,j})_{(i,j)\in[1,m]\times[1,n]} \quad \textit{et} \quad B = (B_{j,k})_{(j,k)\in[1,n]\times[1,p]}$$

de tailles compatibles. Alors le produit AB peut se calculer par blocs :

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}B_{j,k}\right)_{(i,k)\in[1,m]\times[1,p]}.$$

Éléments de preuve. La démonstration n'est pas exigible.

Considérer $u \in L(F,G)$ et $v \in L(E,F)$ des endomorphismes associés à A et B, avec des décompositions en somme directe associées de E, F et G, de projections respectives π_k, ρ_j et σ_i. Décomposer

$$\pi_k \circ u \circ v \circ \sigma_i = \sum_j \pi_k \circ u \circ \rho_j \circ \rho_j \circ v \circ \sigma_i$$

et utiliser les résultats du paragraphe précédent. □

Ainsi, le produit matriciel par blocs suit les mêmes règles que le produit matriciel sur les coefficients, en remplaçant les coefficients par des blocs matriciels. Il faut juste pour cela que les tailles soient compatibles pour former les produits.