1. Sommes directes et blocs

1.1 Somme directe de n sous-espaces vectoriels

On définit la somme de n espaces vectoriels de façon globale, plutôt qu'itérative :

Définition 1.1 (Somme d'un nombre fini de sous-espaces)**.** *Soit $n \geq 1$, et $F_1, \ldots, F_n$ des sous-espaces vectoriel de E. On définit*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + \cdots + F_n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i \mid x_1 \in F_1, \ldots, x_n \in F_n \right\}.$$

Théorème 1.2 (Minimalité de la somme)**.**

$\sum_{i=1}^{n} F_i$ *est le plus petit sous-espace vectoriel de E incluant tous les E_i. En d'autres termes,*

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = \mathit{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i \right).$$

Éléments de preuve.
- C'est un sev, par vérifications simples
- Il inclut tous les F_i
- Par stabilité par somme, si un sev G inclut tous les F_i, il inclut aussi leur somme.

□

Proposition 1.3 (Somme directe)**.** *Soit $F_1, \ldots, F_n$ des sev de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

(i) Pour tout $x \in F_1 + \cdots + F_n$, il existe un unique n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_n$

(ii) Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n$, tel que $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$, $x_1 + \cdots + x_n \neq 0$.

(iii) Pour tout $i \in [1, n]$, $F_i \cap \sum_{j \in [1,n] \setminus \{i\}} F_j = \{0\}$

(iv) Pour tout $i \in [2, n]$, $F_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} F_j = \{0\}$

(v) Pour tout $i \in [2, n]$, la somme de F_i et de $\sum_{j=1}^{i-1} F_j$ est directe.

Dans ce cas, on dit que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe, et pour indiquer cette propriété, on note :

$$F_1 + \cdots + F_n = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Remarque 1.4. *La propriété (v) montre que la somme globale est directe, si et seulement si à chaque étape, le terme qu'on ajoute est en somme directe avec les précédents. Combine aux propriétés d'associativité, cela permet d'écrire :*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} F_i = ((F_1 \oplus F_2) \oplus F_3) \oplus \cdots \oplus F_{n-1}) \oplus F_n.$$

Remarque 1.5 (Avertissement)**.** *Attention à l'erreur courante consistant à caractériser la somme directe par le fait que les intersections deux à deux sont réduites à $\{0\}$ (autrement dit les E_i sont 2 à 2 en somme directe. C'est clairement insuffisant, comme le montre l'exemple de 3 droites vectorielles non confondues dans le plan.*

Exercice 1.6 (Une condition d'égalité de deux sommes directes)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ des sev de E tels que :*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], \quad E_i \subset F_i.$$

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $E_i = F_i$.

Exercice 1.7 (Caractère direct de la somme des sous-espaces propres)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un K-espace vectoriel E. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des elements de K deux a deux distincts. Montrer de deux manieres (l'une avec, l'autre sans le lemme de decomposition des noyaux), que la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id)$ est directe.*

Proposition 1.8 (Dimension d'une somme)**.** *Soit $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de dimension finie de E. Alors :*

1. *$F_1 + \cdots + F_n$ est aussi de dimension finie ;*
2. *$\dim(F_1 + \cdots + F_n) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$;*
3. *si la somme est directe, $\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$.*

Définition 1.9 (Concaténation)**.** *Pour $X = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$ et $Y = (y_1, \dots, y_\ell) \in E^\ell$, on note*

$$X \sim Y = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell)$$

la concaténation du k-uplet X et du ℓ-uplet Y. Il s'agit donc d'un $k + \ell$-uplet. C'est une notation à redémir si vous l'utilisez.

Proposition 1.10 (Base adaptée à une décomposition en somme directe)**.**

1. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, tel que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$, et tout $i \in [1, n]$, B_i une base de E_i. Alors $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ est une base de E.*
2. *Une base B de E est dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ si elle est obtenue de la sorte, par concaténation de bases des E_i.*

Le point 1 montre qu'il existe toujours une base adaptée à une décomposition en somme directe.

Proposition 1.11 (Projecteurs associés à une décomposition en somme directe)**.** *Soit E un espace vectoriel tel que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$. On définit pour tout $i \in [1, n]$, $\pi_i : E \to E$ par*

$$\pi_i : x_1 + \cdots + x_n \mapsto x_i.$$

1. *Pour tout $i \in [1, n]$, π_i est un projecteur. Plus précisément, c'est le projecteur sur E_i parallèlement à la somme des autres E_k.*

2. *Les π_i vérifient :*

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = id_E \quad \textit{et} \quad \forall (i,j) \in [1,n]^2 \quad \pi_i \circ \pi_j = \delta_{i,j}.$$

On peut montrer que réciproquement, si $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ sont des projecteurs vérifiant le point 2, leurs images forment une décomposition de E en somme directe dont ils sont les projecteurs associés.

1.2 Détermination d'une application linéaire

Vous avez déjà vu l'année dernière qu'une application linéaire se détermine entièrement et sans ambiguïté par l'image des vecteurs d'une base. C'est cette représentation qui donne lieu ensuite aux interprétations matricielles : la matrice d'une application linéaire u détermine entièrement u, justement car elle décrit l'image d'une base.

Nous allons donner une version un peu plus générale de ce résultat, en montrant qu'une application linéaire est déterminée par ses restrictions à des sous-espaces formant une décomposition de E en somme directe. En considérant une décomposition de E en somme directe de droites engendrées par les vecteurs d'une base, on retrouve plus ou moins le théorème de détermination d'une AL sur une base, pouvant ainsi considérer que nous avons généralisé ce résultat.

Proposition 1.12 (Détermination d'une AL sur une décomposition en somme directe)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $E = \bigoplus_{j=1}^{n} E_j$ une décomposition de E en somme directe, et pour tout $j \in [1,n]$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$. Alors il existe une et une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que pour tout $j \in [1,n]$, $u|_{E_j} = u_j$.*

Éléments de preuve. Une analyse synthèse sans difficulté. □

Proposition 1.13 (Interprétation matricielle de la détermination sur une $\bigoplus$)**.** *Soit $E = \bigoplus_{i=j}^{n} E_j$ et F deux espaces vectoriels de dimension finie. On note, pour $i \in [1,n]$, $p_j = \dim E_j$, $p = \dim E$ et $q = \dim F$. On se donne $B_1, \dots, B_n$ des bases de $E_1, \dots, E_n$, C une base de F, et on définit $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$, base adaptée à la décomposition de E en somme directe.*

1. *Soit pour tout $j \in [1,n]$, $u_j \in \mathcal{L}(E_j, F)$, et $A_j = Mat_{B_i,C}(u_j) \in \mathcal{M}_{q,p_j}(\mathbb{K})$. Alors l'unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ coïncidant avec chacun des u_j est l'application déterminée par la matrice*

$$Mat_{B,C}(u) = (Mat_{B_1,C}(u_1) \quad Mat_{B_2,C}(u_2) \quad \cdots \quad Mat_{B_n,C}(u_n)) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}),$$

   c'est-à-dire la matrice obtenue en juxtaposant dans une même grande matrice les matrices des u_i dans l'ordre.

2. *Réciproquement, pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et une décomposition en blocs*

$$Mat_{B,C}(u) = (A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_n),$$

   où pour tout $j \in [1,n]$, $A_j \in \mathcal{M}_{q,p_j}$, alors

$$A_j = Mat_{B_j,F}(u|_{E_j}).$$