V. Covariance et corrélation

Théorème V.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et on a :*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Définition V.2 (Covariance)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y le nombre :*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition V.3 (Propriétés de la covariance)**.** *Sous réserve d'existence, pour toutes variables aléatoires X, Y, Z admettant un moment d'ordre 2 et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X, Y)$.
2. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
3. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ *(symétrie)*.
4. $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{cov}(X, Z) + b\operatorname{cov}(Y, Z)$ *(linéarité à gauche)*.
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Définition V.4 (Coefficient de corrélation)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variances non nulles. On appelle coefficient de corrélation de X et Y le nombre :*

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition V.5. *Sous les conditions de la définition ci-dessus, on a :*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et

$$|\rho(X, Y)| = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

VI. Inégalités et théorèmes limites

VI.1 Principales inégalités

Théorème VI.1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $\alpha > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Corollaire VI.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

VI.2 Notion de convergence en probabilité et en loi

Définition VI.3 (Convergence en probabilité)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition VI.4 (Convergence en loi)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si les fonctions de répartition F_{X_n} convergent simplement vers F_X en tout point où F_X est continue.*

Travaux dirigés

Exercice VI.5 (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** *Soit $f : [0;\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Justifier que $\int_0^\pi f(t)\sin(nt)\,dt \to 0$.*

Exercice VI.6 (Variante des intégrales de Wallis avec la fonction tangente)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n\,dt$.*

1. *Calculer u_0 et u_1.*
2. *Vérifier que $\tan' t = 1 + \tan^2 t$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + u_n = \frac{1}{n+1}$.*
3. *En déduire une fonction Python qui prend en argument n et renvoie u_n.*
4. *Étudier les variations de la suite (u_n). En déduire la convergence de la suite (u_n) et calculer la limite.*

Exercice VI.7. *Soit f une fonction continue bornée sur $[0,+\infty[$.*

1. *Démontrer que les intégrales I et J sont convergentes où ...*

Exercice VI.8. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.*

1. *Donner un exemple où $f(t) \not\to 0$ quand $t \to +\infty$. Un graphe suffit...*
2. *Vérifier que la conclusion $f(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$ devient vraie si l'on suppose en plus que f de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\int_0^{+\infty} f'(t)\,dt$ convergente.*

Exercice VI.9. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,dt$ soient convergentes.*

1. (a) *Effectuer le changement de variable $u = -1/t$ sur $\int_0^{+\infty} f(t-1/t)\,dt$ et $\int_{-\infty}^{0} f(t-1/t)\,dt$.*

   (b) *En déduire*
   $$2\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-1/t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{t^2}\right) f\left(t-\frac{1}{t}\right)\,dt.$$

   (c) *À l'aide d'un nouveau changement de variable, établir l'égalité*
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t-\frac{1}{t}\right)\,dt.$$

2. *Application. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$, calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-1/t^2}\,dt$.*

Exercice VI.10. *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ non constant. Justifier que l'intégrale*
$$\int_0^{+\infty} \cos(P(t))\,dt$$
est convergente si et seulement si $\deg P \geq 2$.

Variable aléatoire à densité

Exercice VI.11 (Vrai ou faux?)**.** *Toute variance de variable aléatoire réelle à densité est strictement positive.*

Exercice VI.12 (Autour de la loi de Cauchy)**.** *Une variable aléatoire à densité suit une loi de Cauchy si une densité est $f : t \in \mathbb{R} \to \frac{1}{\pi(1+t^2)}$.*

1. *Préliminaires.*

(a) *Simplifier* $\arctan(t) + \arctan(1/t)$ *lorsque* $t \in \mathbb{R}^*$.

(b) *Donner la fonction de répartition d'une loi de Cauchy.*

2. *Soit* X *une variable aléatoire à densité suivant une loi de Cauchy. On pose* $Y = 1/X$.

   (a) *Calculer* $\mathbb{P}(Y < 0)$*, puis, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(0 < Y \leq x)$.

   (b) *Montrer que* Y *suit encore une loi de Cauchy.*

3. *Un tireur envoie sa balle sur un demi-plan droit. On suppose que l'angle* Θ *entre la trajectoire et l'axe* (Ox) *est une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. Justifier que la position* Z *de la balle sur la cible (d'axe* $x = 1$*) suit une loi de Cauchy.*

Exercice VI.13. *Soit* X *une variable aléatoire de densité* f *symétrique (i.e.* $f(-t) = f(t)$*).*

1. *Préciser* $\mathbb{P}(X \geq 0)$.

2. *On note* F *la fonction de répartition de* X*. Justifier que* $x \in \mathbb{R} \mapsto F(x) - \frac{1}{2}$ *est impaire.*

3. *On suppose que* $\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt$ *converge. Démontrer que* X *admet une espérance et la calculer.*

Exercice VI.14. *Soient* X *et* Y *deux variables à densité. On suppose que* X *et* Y *admettent une espérance et des densités strictement positives sur* $\mathbb{R}$.

1. *Soit* F_X *la fonction de répartition de* X*. Quelle est la loi de* $F_X^{-1}(U)$ *où* $U \sim \mathcal{U}(]0;1[)$*?*

2. *La figure ci-contre (non reproduite) est la représentation graphique des fonctions de répartition de* X *et* Y*. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande? Justifier.*

Exercice VI.15 (Nouvelle expression de l'espérance)**.** *Soit* X *une variable aléatoire à densité. On note* f *une densité de* X*, et* F *sa fonction de répartition. On suppose que* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *et que* $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}_-$.

1. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^x (1 - F(t))\,dt = x(1 - F(x)) + \int_0^x tf(t)\,dt. \quad (\bullet)$$

2. *On suppose dans cette question que* X *possède une espérance.*

   (a) *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x \int_x^{+\infty} f(t)\,dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

   (b) *En déduire que* $x(1 - F(x)) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

   (c) *À l'aide de la relation* $(\bullet)$*, montrer que l'intégrale* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt$ *converge, et que* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt = \mathbb{E}(X)$.

3. *On étudie la réciproque. On suppose dans cette question que l'intégrale* $\int_0^{+\infty}(1 - F(t))\,dt$ *converge.*

   (a) *Montrer que l'application* $\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$.

   (b) *Montrer en utilisant* $(\bullet)$ *que* φ *est majorée.*

   (c) *En déduire que* $\mathbb{E}(X)$ *existe et que*

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,dt.$$

4. *Adapter le raisonnement pour montrer que si* X *admet un moment d'ordre 2, alors*

$$\mathbb{E}(X^2) = 2\int_0^{+\infty} t(1 - F(t))\,dt.$$

Exercice VI.16. *Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Montrer que la fonction g définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = F(x+1) - F(x)$$

est une densité de probabilité.

Exercice VI.17. *Soit X une variable aléatoire admettant une densité f continue sur $\mathbb{R}$ et un moment d'ordre 2. Caractériser la valeur du réel a qui minimise l'expression*

$$\varphi(a) = \mathbb{E}((X-a)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-a)^2 f(t)\, dt.$$

Exercice VI.18.

1. (a) *Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$.*

   (b) *Soit V une variable aléatoire telle que $V(\Omega) = [0, \pi/2]$ suivant la loi uniforme sur $[0, \pi/2]$ (une densité est donnée par $\frac{2}{\pi}\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}$). On pose: $X = \tan^2(V)$. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.*

   (c) *En déduire que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{x}(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.*

2. (a) *Compléter le code python de la fonction simulX suivante de sorte que son application à l'entier N ($N \geq 2$) fournisse une matrice ligne contenant N simulations indépendantes de la variable aléatoire X.*

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
def simulX(...):
u=rd.rand(N)
x=np.ones(N)
for i in range(N):
x[i]= ...
return x
```

   (b) *Après avoir affecté une valeur entière supérieure ou égale à 2 à la variable N, on exécute les commandes suivantes. Trouver la loi d'une variable aléatoire dont la valeur de c est, en fin de boucle, une simulation.*

```
N=100
c=0
x=simulX(N)
for i in range(N):
if x[i]>1:
c=c+1
```

Exercice VI.19. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}.$$

1. *Vérifier que f est une densité de probabilité. On note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dont f est une densité de probabilité.*

2. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'existence du moment d'ordre m de la variable X. Donner la valeur de l'espérance de X.*

3. *Pour tout entier n non nul et tout réel x, on pose :*

$$H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\left(1 + te^{-n|t|}\right) dt.$$

Montrer que H_n est une fonction de répartition.

4. *Soit X_n une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont H_n est la fonction de répartition. Vérifier que pour tout réel x*

$$H_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$

où F est la fonction de répartition de X.

Exercice VI.20. *Soient $Z \sim \mathcal{U}([0;1])$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n \sim \mathcal{U}([1;n])$. Comparer*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left(\arctan\left(\frac{Y_n}{n}\right)\right) \quad \textit{et} \quad \mathbb{E}(\arctan(Z)).$$

Exercice VI.21. 1. *On pose pour tout $t \in]-1;1[$, $g(t) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$.*

   (a) *Justifier que g est une bijection de $]-1;1[$ dans $\mathbb{R}$.*

   (b) *Donner une expression simple de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Justifier que g^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner $(g^{-1})'$.*

   (c) *Soit $X \sim \mathcal{U}([-1;1])$. On définit la variable $T = g(X)$.*

      i. *Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = F_X(g^{-1}(x))$.*

      ii. *En déduire que T est une variable aléatoire à densité. On précisera une densité.*

2. (a) *Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.*

   (b) *Faire de même avec $V = X^2$.*

Exercice VI.22. *On considère l'application f définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2}.$$

1. *Montrer que f est une densité de probabilité.*

2. *Soit X une variable aléatoire réelle qui admet f comme densité. Déterminer F, la fonction de répartition de X.*

3. *Soit φ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ et $Y = \varphi(X)$.*

   (a) *Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$ et déterminer sa bijection réciproque.*

   (b) *Déterminer la loi de Y.*

Exercice VI.23 (Médiane(s) d'une variable aléatoire)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant une espérance.*

1. *Justifier qu'il existe un réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) = \frac{1}{2}$. Un tel réel est une médiane de X. Notons dans la suite, $\mathcal{M}(X)$, l'ensemble des médianes de la variable X.*

2. *Déterminer la ou les médianes d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. Est-ce que l'espérance de X est une médiane?*

3. *Dans la suite, on souhaite déterminer les réels a qui minimisent la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \varphi(a) = \mathbb{E}(|X-a|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-a| f(t)\, dt.$$

(a) *Justifier que φ est une fonction convexe.*

(b) *On définit la fonction G sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_{-\infty}^{x} tf(t)\,dt$. Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée.*

(c) *En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer φ' à l'aide de la fonction de répartition F de X.*

(d) *Conclure sur les réels qui minimisent φ.*

4. *Démontrer que l'ensemble des médianes d'une variable à densité X est un segment. (Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous $x, y \in I$, le segment $[x; y] \subset I$.)*

Exercice VI.24. *On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f et g par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(2\pi \ln(x)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\ln(x)^2/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement de variable $u = \ln(t) - n$, justifier la convergence et l'égalité*
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)g(t)\,dt = 0.$$

2. *Soit $Y \sim \mathcal{N}(0; 1)$. Vérifier que $X = e^Y$ est une variable aléatoire à densité dont g est une densité.*

3. *Pour tout réel $\lambda \in]-1; 1[$, on définit la fonction $h_\lambda = (1 + \lambda f) \cdot g$. Vérifier que h_λ est une densité de probabilité.*

4. (a) *Justifier que X admet des moments à tout ordre.*

   (b) *Soit Y_λ une variable aléatoire dont une densité est donnée par h_λ. Démontrer que Y_λ admet des moments à tout ordre et :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}(Y_\lambda^n) = \mathbb{E}(X^n).$$