V. Covariance et corrélation

Théorème V.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et on a :*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Définition V.2 (Covariance)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y le nombre :*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition V.3 (Propriétés de la covariance)**.** *Sous réserve d'existence, pour toutes variables aléatoires X, Y, Z admettant un moment d'ordre 2 et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X, Y)$.
2. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
3. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ *(symétrie)*.
4. $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{cov}(X, Z) + b\operatorname{cov}(Y, Z)$ *(linéarité à gauche)*.
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Définition V.4 (Coefficient de corrélation)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variances non nulles. On appelle coefficient de corrélation de X et Y le nombre :*

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition V.5. *Sous les conditions de la définition ci-dessus, on a :*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et

$$|\rho(X, Y)| = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

VI. Inégalités et théorèmes limites

VI.1 Principales inégalités

Théorème VI.1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $\alpha > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Corollaire VI.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

VI.2 Notion de convergence en probabilité et en loi

Définition VI.3 (Convergence en probabilité)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition VI.4 (Convergence en loi)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si les fonctions de répartition F_{X_n} convergent simplement vers F_X en tout point où F_X est continue.*