IV.2 Variance

Définition IV.4 (variance et écart-type)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *On appelle variance d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.*
- *On appelle écart-type de X, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*

Remarque IV.5. *La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geq 0$. L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.*

Proposition IV.6. *Si X est une variable aléatoire réelle de densité f admettant une variance, alors $\mathbb{V}(X) > 0$.*

Démonstration. La fonction $x \mapsto (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc son intégrale est positive ou nulle. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $(x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est nulle en tous les points de continuité de f. Puisque $x-\mathbb{E}(X)$ ne s'annule que pour $x = \mathbb{E}(X)$, cela signifie que f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qui impliquerait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$, contradiction avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. □

Proposition IV.7 (propriétés de la variance)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *$\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.*
- *Pour tous réels a, b,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Théorème IV.8 (formule de Koenig-Huygens)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) = (x^2 - 2x\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) f_X(x)$$

En intégrant, on obtient $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. □

Définition IV.9 (variable centrée réduite)**.** *Soit X une variable aléatoire. Nous avons vu qu'une variable aléatoire X est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$. Elle est dite réduite si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.*

Proposition IV.10 (Variances des lois classiques)**.**

- *Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*
- *Si $X \sim \gamma(\nu)$, alors $\mathbb{V}(X) = \nu$.*

V. Covariance et corrélation

Théorème V.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Alors XY admet une espérance et on a :*

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

Définition V.2 (Covariance)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. On appelle covariance de X et Y le nombre :*

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition V.3 (Propriétés de la covariance)**.** *Sous réserve d'existence, pour toutes variables aléatoires X, Y, Z admettant un moment d'ordre 2 et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:*

1. $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y) + 2ab\operatorname{cov}(X, Y)$.
2. $\operatorname{cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$.
3. $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$ *(symétrie)*.
4. $\operatorname{cov}(aX + bY, Z) = a\operatorname{cov}(X, Z) + b\operatorname{cov}(Y, Z)$ *(linéarité à gauche)*.
5. *Si X et Y sont indépendantes, alors* $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

Définition V.4 (Coefficient de corrélation)**.** *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 et de variances non nulles. On appelle coefficient de corrélation de X et Y le nombre :*

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

Proposition V.5. *Sous les conditions de la définition ci-dessus, on a :*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1,$$

et

$$|\rho(X, Y)| = 1 \iff \exists a, b \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1.$$

VI. Inégalités et théorèmes limites

VI.1 Principales inégalités

Théorème VI.1 (Inégalité de Markov)**.** *Soit X une variable aléatoire positive. Alors pour tout $\alpha > 0$:*

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\alpha}.$$

Corollaire VI.2 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.** *Si X admet un moment d'ordre 2, alors pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

VI.2 Notion de convergence en probabilité et en loi

Définition VI.3 (Convergence en probabilité)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en probabilité vers une variable aléatoire X si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Définition VI.4 (Convergence en loi)**.** *On dit qu'une suite (X_n) de variables aléatoires converge en loi vers une variable aléatoire X si les fonctions de répartition F_{X_n} convergent simplement vers F_X en tout point où F_X est continue.*