Proposition III.6 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

Proposition III.7 (existence par domination)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires à densité sur un même espace probabilisé, admettant une espérance et telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Alors X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.*

Corollaire III.8. *Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance, et*

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

III.2 Formule de transfert

Théorème III.9 (de transfert)**.** *Soient X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ avec $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre*

1. *La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.*
2. *L'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt$ converge absolument.*

Et en cas de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt.$$

Exemple III.10. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, et soit $Y = e^X$. Alors Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t} dt$ converge absolument. Or, $\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)t} dt$ converge si et seulement si $\lambda - 1 > 0 \iff \lambda > 1$. De plus, dans ce cas, on a $\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.*

IV. Moments et variance d'une variable à densité

IV.1 Moments

Définition IV.1 (moment d'ordre r)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Proposition IV.2. *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r, q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leq r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^q \leq 1 + |x|^r$, et donc

$$|x|^q f(x) \leq f(x) + |x|^r f(x).$$

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, et donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)dt$ converge, il en est de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q f(t)dt$. □

Remarque IV.3. *En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.*

IV.2 Variance

Définition IV.4 (variance et écart-type)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *On appelle variance d'une variable aléatoire X, la quantité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.*
- *On appelle écart-type de X, la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.*

Remarque IV.5. *La quantité $\sigma(X)$ est bien définie car $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geq 0$. L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.*

Proposition IV.6. *Si X est une variable aléatoire réelle de densité f admettant une variance, alors $\mathbb{V}(X) > 0$.*

Démonstration. La fonction $x \mapsto (x-\mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$, donc son intégrale est positive ou nulle. De plus, $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $(x - \mathbb{E}(X))^2 f(x)$ est nulle en tous les points de continuité de f. Puisque $x-\mathbb{E}(X)$ ne s'annule que pour $x = \mathbb{E}(X)$, cela signifie que f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points, ce qui impliquerait $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$, contradiction avec $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$. □

Proposition IV.7 (propriétés de la variance)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

- *$\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante.*
- *Pour tous réels a, b,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$

Théorème IV.8 (formule de Koenig-Huygens)**.** *Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) = (x^2 - 2x\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) f_X(x)$$

En intégrant, on obtient $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. □

Définition IV.9 (variable centrée réduite)**.** *Soit X une variable aléatoire. Nous avons vu qu'une variable aléatoire X est dite centrée si $\mathbb{E}(X) = 0$. Elle est dite réduite si $\sigma(X) = 1$. La variable aléatoire $Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite.*

Proposition IV.10 (Variances des lois classiques)**.**

- *Si $X \sim \mathcal{U}([a, b])$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*
- *Si $X \sim \gamma(\nu)$, alors $\mathbb{V}(X) = \nu$.*