Proposition II.43 (Stabilité de la loi normale)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors*

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Remarque II.44. *On n'ajoute pas les écarts-types, mais bien les variances. Par conséquent, l'écart-type de $X + Y$ est $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.*

Théorème II.45 (Somme d'une variable discrète et d'une variable à densité)**.** *Soient X_1 une variable aléatoire discrète et X_2 une variable aléatoire à densité, indépendantes. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par :*

$$f_S(s) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x) f_{X_2}(s - x).$$

III. Espérance d'une variable à densité

III.1 Définition

Définition III.1 (espérance)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on note*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt.$$

Remarque III.2. *Attention. Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue. En fait, puisque $tf(t)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, l'intégrale est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.*

Exemple III.3.

- *Considérons X une variable à densité dont une densité est précisée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux, nulle en dehors d'un segment. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$ converge donc absolument et X admet une espérance avec

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

- *Reprenons l'exemple d'une variable aléatoire Y de densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} e^{-|t|}$. Par les croissances comparées et le critère de négligeabilité, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. L'espérance existe. La densité f est une fonction paire, donc $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est impaire. Il vient*

$$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt, \quad \text{puis, } \mathbb{E}(Y) = 0.$$

Exemple III.4 (Loi de Cauchy)**.** *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x^2}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, donc f est une densité. Soit X une variable aléatoire de densité f. On a $xf(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x}$, de sorte que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, et donc X n'admet pas d'espérance.*

Remarque III.5. *Attention. La condition de parité de la densité n'est pas suffisante, il faut aussi que l'espérance existe comme le montre l'exemple de la loi de Cauchy.*

Proposition III.6 (Linéarité de l'espérance)**.** *Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et on a :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

Proposition III.7 (existence par domination)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires à densité sur un même espace probabilisé, admettant une espérance et telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Alors X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.*

Corollaire III.8. *Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b$ admet une espérance, et*

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

III.2 Formule de transfert

Théorème III.9 (de transfert)**.** *Soient X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ avec $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$ et $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. On a l'équivalence entre*

1. *La variable $\varphi(X)$ admet une espérance.*
2. *L'intégrale $\int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt$ converge absolument.*

Et en cas de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t)\, dt.$$

Exemple III.10. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ, et soit $Y = e^X$. Alors Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^t f_X(t) dt = \int_0^{+\infty} e^t \lambda e^{-\lambda t} dt$ converge absolument. Or, $\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-1)t} dt$ converge si et seulement si $\lambda - 1 > 0 \iff \lambda > 1$. De plus, dans ce cas, on a $\mathbb{E}(Y) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.*

IV. Moments et variance d'une variable à densité

IV.1 Moments

Définition IV.1 (moment d'ordre r)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$. On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance. Dans ce cas, on note*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Proposition IV.2. *Soit X une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit $r, q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leq r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.*

Démonstration. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x|^q \leq 1 + |x|^r$, et donc

$$|x|^q f(x) \leq f(x) + |x|^r f(x).$$

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, et donc si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^r f(t)dt$ converge, il en est de même de $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^q f(t)dt$. □

Remarque IV.3. *En particulier, une variable aléatoire à densité qui admet un moment d'ordre 2 admet une espérance.*