Exemple II.35. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, et soit $Y = -\ln(X)$. Alors $Y(\Omega) = [0, +\infty[$, et donc pour $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a, par croissance de la fonction exponentielle,*

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln X \leq x) = \mathbb{P}(\ln X \geq -x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}).$$

Or $e^{-x} \in [0,1]$ et donc $\mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$. Ainsi, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Donc $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice II.36. *Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}$.*

1. *Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.*
2. *Faire de même avec $V = X^2$.*
3. *Cas général. Soit Z une variable aléatoire réelle à densité f continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $Y = Z^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$ et donnée sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})).$$

II.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires

Théorème II.37 (Somme de deux variables à densité indépendantes)**.** *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_{X_1} et f_{X_2}. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par le produit de convolution :*

$$f_S(s) = (f_{X_1} * f_{X_2})(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(s-u)\, du.$$

Exemple II.38 (Somme de deux variables uniformes indépendantes sur [0,1)**.** *] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $Z = X + Y$. Alors une densité de Z est donnée par :*

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in [0,1] \\ 2 - z & \text{si } z \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition II.39. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors XY admet une espérance, et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Proposition II.40. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Proposition II.41 (Stabilité de la loi Gamma)**.** *Soient $\nu_1, \nu_2 > 0$, et soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes telles que $X \sim \gamma(\nu_1)$ et $Y \sim \gamma(\nu_2)$. Alors $X + Y \sim \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.*

Corollaire II.42. *Si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{E}(1)$, alors $X + Y \sim \gamma(2)$.*

Proposition II.43 (Stabilité de la loi normale)**.** *Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Alors*

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Remarque II.44. *On n'ajoute pas les écarts-types, mais bien les variances. Par conséquent, l'écart-type de $X + Y$ est $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.*

Théorème II.45 (Somme d'une variable discrète et d'une variable à densité)**.** *Soient X_1 une variable aléatoire discrète et X_2 une variable aléatoire à densité, indépendantes. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par :*

$$f_S(s) = \sum_{x \in X_1(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = x) f_{X_2}(s - x).$$

III. Espérance d'une variable à densité

III.1 Définition

Définition III.1 (espérance)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, on note*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt.$$

Remarque III.2. *Attention. Comme pour les variables aléatoires discrètes, il ne faut pas oublier la convergence absolue. En fait, puisque $tf(t)$ est de signe constant sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, l'intégrale est absolument convergente si et seulement si elle est convergente.*

Exemple III.3.

- *Considérons X une variable à densité dont une densité est précisée par :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction f est continue par morceaux, nulle en dehors d'un segment. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$ converge donc absolument et X admet une espérance avec

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}.$$

- *Reprenons l'exemple d'une variable aléatoire Y de densité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} e^{-|t|}$. Par les croissances comparées et le critère de négligeabilité, il est clair que $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ est absolument convergente. L'espérance existe. La densité f est une fonction paire, donc $t \in \mathbb{R} \mapsto t f(t)$ est impaire. Il vient*

$$\int_{-\infty}^{0} t f(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt, \quad \text{puis, } \mathbb{E}(Y) = 0.$$

Exemple III.4 (Loi de Cauchy)**.** *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x^2}$. On a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, donc f est une densité. Soit X une variable aléatoire de densité f. On a $xf(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{\pi x}$, de sorte que $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ diverge, et donc X n'admet pas d'espérance.*

Remarque III.5. *Attention. La condition de parité de la densité n'est pas suffisante, il faut aussi que l'espérance existe comme le montre l'exemple de la loi de Cauchy.*