II.3 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité?
Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq t)$.
- Ensuite, on s'assure que F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée F_Y sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y.

Remarque II.32. *Attention. Dans le cas général d'une application φ, rien ne garantit que $Y = \varphi(X)$ reste une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire.*

Exemple II.33 (Calcul de la loi de $Y = aX + b$ en fonction de la loi de X)**.** *Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour donner la loi de $Y = aX + b$, nous avons vu qu'il suffit de donner la fonction de répartition ou une densité de Y. Soit $t \in \mathbb{R}$.*

- *Pour $a > 0$.*

$$[Y \leq t] = \left[X \leq \frac{t-b}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Rappelons que F_X est continue et, sauf en un nombre fini de points, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, F_Y est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$. Y est donc une variable aléatoire à densité. F_Y est dérivable sauf en un nombre fini de points avec :

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{1}{a}F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Relation que l'on peut étendre à tout réel t pour définir une densité de Y.

- *Pour $a < 0$. On a maintenant $[Y \leq t] = \left[X \geq \frac{t-b}{a}\right]$. Passons au complémentaire,*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{t-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  En dérivant,

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  De nouveau, on étend cette égalité à tout réel t. En résumé, on obtient dans tous les cas

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Exemple II.34. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$. Alors une densité de X est donnée par*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on pose $Y = -2X + 3$, alors Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_Y(x) = \frac{1}{2}f_X\left(\frac{3-x}{2}\right) = \begin{cases} e^{-(3-x)} & \text{si } \frac{3-x}{2} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple II.35. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$, et soit $Y = -\ln(X)$. Alors $Y(\Omega) = [0, +\infty[$, et donc pour $x < 0$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = 0$. Pour $x \geq 0$, on a, par croissance de la fonction exponentielle,*

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(-\ln X \leq x) = \mathbb{P}(\ln X \geq -x) = \mathbb{P}(X \geq e^{-x}).$$

Or $e^{-x} \in [0,1]$ et donc $\mathbb{P}(X \geq e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - e^{-x}$. Ainsi, la fonction de répartition de Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Donc $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Exercice II.36. *Soit X une variable aléatoire à densité suivant une loi uniforme sur $[-1;1]$. C'est-à-dire, une densité de X est donnée par $f = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[-1;1]}$.*

1. *Justifier que $U = |X|$ est une variable à densité et donner une densité.*
2. *Faire de même avec $V = X^2$.*
3. *Cas général. Soit Z une variable aléatoire réelle à densité f continue sur $\mathbb{R}$. Justifier que $Y = Z^2$ est une variable aléatoire réelle admettant une densité nulle sur $\mathbb{R}_-$ et donnée sur $\mathbb{R}_+$ par*

$$g(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})).$$

II.4 Loi d'une somme de deux variables aléatoires

Théorème II.37 (Somme de deux variables à densité indépendantes)**.** *Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives f_{X_1} et f_{X_2}. Alors leur somme $S = X_1 + X_2$ est une variable aléatoire à densité, dont la densité est donnée par le produit de convolution :*

$$f_S(s) = (f_{X_1} * f_{X_2})(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(u) f_{X_2}(s-u)\, du.$$

Exemple II.38 (Somme de deux variables uniformes indépendantes sur [0,1)**.** *] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, et soit $Z = X + Y$. Alors une densité de Z est donnée par :*

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in [0,1] \\ 2 - z & \text{si } z \in [1,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition II.39. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors XY admet une espérance, et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.*

Proposition II.40. *Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes admettant une variance, alors $X + Y$ admet une variance et*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

Proposition II.41 (Stabilité de la loi Gamma)**.** *Soient $\nu_1, \nu_2 > 0$, et soient X, Y deux variables aléatoires réelles à densité indépendantes telles que $X \sim \gamma(\nu_1)$ et $Y \sim \gamma(\nu_2)$. Alors $X + Y \sim \gamma(\nu_1 + \nu_2)$.*

Corollaire II.42. *Si X et Y sont indépendantes et suivent la loi $\mathcal{E}(1)$, alors $X + Y \sim \gamma(2)$.*