Proposition II.15 (conditions pour une variable à densité). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si*

- *La fonction f est positive.*
- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

(Résultat admis.)

Exemple II.16 (Loi de Gumbel). *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x-e^{-x}}$$

est densité de probabilité. En effet, il est clair que la fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition). Or pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ avec $A < B$,

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B e^{-x}e^{-e^{-x}}\,dx = \left[e^{-e^{-x}}\right]_A^B \xrightarrow[A\to-\infty, B\to+\infty]{} 1.$$

II.2 Lois classiques à densité

Définition II.17 (Loi uniforme sur [0,1). *] On dit que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, notée $\mathcal{U}([0,1])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.18. *Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$.

Définition II.19 (Loi uniforme sur $[a,b)$. *] Soient $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, notée $\mathcal{U}([a,b])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.20. *Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

De plus, $\frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Définition II.21 (Loi exponentielle). *Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Proposition II.22. *Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \textit{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

De plus, $\lambda X \sim \mathcal{E}(1)$.

Proposition II.23 (Propriété d'absence de mémoire)**.** *La loi exponentielle est qualifiée d'être une loi sans mémoire dans le sens que :*

$$\forall t, h > 0, \quad \mathbb{P}(X > t + h \mid X > t) = \mathbb{P}(X > h).$$

Réciproquement, toute variable aléatoire positive à densité vérifiant cette propriété suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = -F'_X(0^+)$.

Définition II.24 (Loi Gamma)**.** *Soit $\nu > 0$. On dit que X suit une loi Gamma de paramètre ν, notée $\gamma(\nu)$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x} & \textit{si } x > 0 \\ 0 & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler.

Remarque II.25.

- $\gamma(1) = \mathcal{E}(1)$.
- *La densité d'une loi $\gamma(\nu)$ est bornée si et seulement si $\nu \geq 1$.*

Proposition II.26. *Si $X \sim \gamma(\nu)$, alors $\mathbb{E}(X) = \nu$ et $\mathbb{V}(X) = \nu$.*

Définition II.27 (Loi normale standard)**.** *On dit que X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

On note souvent Φ la fonction de répartition associée :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Proposition II.28.

- *Par symétrie de la densité, $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.*
- $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
- *Φ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + xy' = 0$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$.*

Définition II.29 (Loi normale générale)**.** *Soient $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On dit que X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si sa densité est donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Proposition II.30.

- *On a l'équivalence : $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.*
- *Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.*
- *Pour $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.*
- *La fonction de répartition de X est donnée par $F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.*

Exemple II.31. *On suppose que X suit la loi normale $\mathcal{N}(0.8, 1.1^2)$. Calculer $\mathbb{P}(-1.3 < X < 1.5)$. (Rép : environ 0,4394)*

II.3 Cas des variables du type $Y = \varphi(X)$

Comment montrer qu'une variable aléatoire est à densité et obtenir une densité?
Soit X, une première variable aléatoire à densité et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une application. On pose $Y = \varphi(X)$. Pour justifier que Y est une nouvelle variable aléatoire, on peut procéder comme suit :

- On précise $Y(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par Y.
- On exprime la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En particulier, on cherche pour tout $t \in Y(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq t)$.
- Ensuite, on s'assure que F_Y est bien continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points (noté dans la suite D).
- On calcule la dérivée F_Y sur $\mathbb{R} \setminus D$ afin d'avoir une densité de Y.

Remarque II.32. *Attention. Dans le cas général d'une application φ, rien ne garantit que $Y = \varphi(X)$ reste une variable aléatoire à densité, ni même une variable aléatoire.*

Exemple II.33 (Calcul de la loi de $Y = aX + b$ en fonction de la loi de X)**.** *Soient X une variable aléatoire à densité et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour donner la loi de $Y = aX + b$, nous avons vu qu'il suffit de donner la fonction de répartition ou une densité de Y. Soit $t \in \mathbb{R}$.*

- *Pour $a > 0$.*

$$[Y \leq t] = \left[X \leq \frac{t-b}{a}\right] \quad \Rightarrow \quad F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Rappelons que F_X est continue et, sauf en un nombre fini de points, F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition, F_Y est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en un nombre fini de points sur $\mathbb{R}$. Y est donc une variable aléatoire à densité. F_Y est dérivable sauf en un nombre fini de points avec :

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{1}{a}F_X'\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  Relation que l'on peut étendre à tout réel t pour définir une densité de Y.

- *Pour $a < 0$. On a maintenant $[Y \leq t] = \left[X \geq \frac{t-b}{a}\right]$. Passons au complémentaire,*

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}\left(X \geq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X < \frac{t-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  En dérivant,

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = -\frac{1}{a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{-a}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

  De nouveau, on étend cette égalité à tout réel t. En résumé, on obtient dans tous les cas

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_Y(t) = \frac{1}{|a|}f_X\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Exemple II.34. *Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(2)$. Alors une densité de X est donnée par*

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si l'on pose $Y = -2X + 3$, alors Y est une variable à densité, dont une densité est donnée par

$$f_Y(x) = \frac{1}{2}f_X\left(\frac{3-x}{2}\right) = \begin{cases} e^{-(3-x)} & \text{si } \frac{3-x}{2} \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} e^{x-3} & \text{si } x \leq 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$