II. Variables aléatoires à densité

II.1 Définitions et premières propriétés

Définition II.1 (variable aléatoire à densité)**.** *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X. On dit que X est une variable aléatoire à densité si :*

- *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*

Exemple II.2.

- *Si F_X vérifie :*

$$\forall x \in]-\infty; 0[, F_X(x) = 0, \quad \forall x \in [0; 1], F_X(x) = x, \quad \forall x \in]1; +\infty[, F_X(x) = 1,$$

  alors X est une variable à densité. On dira dans la suite que X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

- *Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables à densité.*

Remarque II.3. *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Nous avons vu que pour tous réels a, b avec $a < b$,*

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

De plus, on montre que

$$\mathbb{P}(X = b) = F_X(b) - \lim_{a \to b^-} F_X(a).$$

Preuve. En effet, on a par exemple $[X = b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]b - 1/n < X \leq b]$. La suite d'événements $(]b - 1/n < X \leq b])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone dans sa version probabiliste s'applique. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(b - 1/n < X \leq b) = F_X(b) - \lim_{n \to +\infty} F_X(b - 1/n).$$

On conclut en rappelant que la fonction de répartition est continue à gauche.

Si X est une variable aléatoire à densité, F_X est continue. En particulier, pour $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X = b) = 0$. Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in]a; b]) = \mathbb{P}(X \in [a; b]) = \mathbb{P}(X \in]a; b[) = \mathbb{P}(X \in [a; b[).$$

Définition II.4 (densité de probabilité)**.** *On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle vérifie :*

- *f est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*
- *L'intégrale suivante est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.*

Remarque II.5. *On démontre (et nous admettons) que toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1 est une densité de probabilité.*

Exemple II.6. *Justifions que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ définit une densité de probabilité.*

- *f est clairement une fonction positive.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.*

- *Pour $A \in \mathbb{R}_+$, on a*

$$\int_0^A f(t)\,dt = \int_0^A \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_0^A = \frac{\arctan(A)}{\pi} \xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\pi/2}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

De même, pour $B \in \mathbb{R}_-$, par parité de f, $\int_B^0 f(t)\,dt \xrightarrow[B\to-\infty]{} \frac{1}{2}$. On a bien la convergence et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$. En conclusion, f est une densité de probabilité.

Exercice II.7. *1. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ te^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

2. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{\lambda}{e^t+1}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$.

(a) Déterminer deux réels a et b tels que: $\forall x > 0$, $\frac{1}{x^2+x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.

(b) En déduire la valeur de la constante λ pour que λf soit une densité de probabilité.

Proposition II.8 (densité de probabilité d'une variable à densité)**.** *Soit X une variable aléatoire à densité. Toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à valeurs positives qui coïncide avec F_X' sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points est une densité de probabilité. On dit que f est une densité de probabilité de la variable aléatoire X.*

Proposition II.9 (densité et fonction de répartition)**.** *Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F_X, f_X respectivement la fonction de répartition et une densité de X.*

- *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$ est convergente, et $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t)\,dt$.*
- *Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ tels que $a < b$, $\mathbb{P}(X \in [a; b]) = \int_a^b f_X(t)\,dt$.*

Remarque II.10. *En particulier, on a $\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt$.*

Exemple II.11. *Reprenons la densité $f(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ de l'exemple précédent et calculons la fonction de répartition F. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{\pi(1+t^2)} = \left[\frac{\arctan(t)}{\pi}\right]_{-\infty}^x = \frac{\arctan(x)}{\pi} + \frac{1}{2}.$$

Remarque II.12. *Attention. Il ne faut pas confondre fonction de répartition et densité. Rappelons qu'une fonction de répartition est une fonction croissante de limite 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. Le lien est, pour tout $t \in \mathbb{R}$, sauf un nombre fini,*

$$f_X(t) = F_X'(t).$$

La densité d'une variable X n'est pas unique alors que la fonction de répartition l'est.

Proposition II.13 (la densité caractérise la loi)**.** *Soient X et Y deux variables aléatoires à densité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Si f est à la fois une densité de X et Y, alors X et Y ont même loi.*

Remarque II.14. *En pratique, donner la loi d'une variable aléatoire à densité est équivalent à donner*

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) \text{ pour tous } a, b \in \mathbb{R},$$

C'est aussi équivalent à donner la fonction de répartition ou une densité de probabilité.

Proposition II.15 (conditions pour une variable à densité). *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Si*

- *La fonction f est positive.*
- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, éventuellement privé d'un ensemble fini de points.*
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Alors il existe une variable aléatoire X dont f est une densité de probabilité.

(Résultat admis.)

Exemple II.16 (Loi de Gumbel). *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x-e^{-x}}$$

est densité de probabilité. En effet, il est clair que la fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (par composition). Or pour tous $A, B \in \mathbb{R}$ avec $A < B$,

$$\int_A^B f(x)\,dx = \int_A^B e^{-x}e^{-e^{-x}}\,dx = \left[e^{-e^{-x}}\right]_A^B \xrightarrow[A\to-\infty, B\to+\infty]{} 1.$$

II.2 Lois classiques à densité

Définition II.17 (Loi uniforme sur [0,1). *] On dit que X suit la loi uniforme sur $[0,1]$, notée $\mathcal{U}([0,1])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.18. *Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors sa fonction de répartition est donnée par :*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et on a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{12}$.

Définition II.19 (Loi uniforme sur $[a,b)$. *] Soient $a < b$. On dit que X suit la loi uniforme sur $[a,b]$, notée $\mathcal{U}([a,b])$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition II.20. *Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, alors :*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

De plus, $\frac{X-a}{b-a} \sim \mathcal{U}([0,1])$.

Définition II.21 (Loi exponentielle). *Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est donnée par :*

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction de répartition est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$