- *f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,*
- *$f \sim g$,*

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Remarque I.7. *En pratique, on compare souvent aux intégrales de Riemann.*

- *L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;*
- *L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

I.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème I.8 (changement de variable)**.** *Soit f continue sur un intervalle $]a;b[$. Si $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,du$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence,*

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt.$$

Remarque I.9. *L'énoncé s'étend au cas décroissant.*

Méthode I.10 (Rédiger un changement de variable dans le cas généralisé)**.** *Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.*

- *La fonction $x \in [0;+\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, I est une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \sim \frac{1}{e^{x/2}}.$$

  Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ est convergente, par le critère d'équivalence pour des intégrandes positives, I est convergente.

- *Soit $\varphi : x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt{1+e^x}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ par composition. De plus,*

$$\varphi(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

  φ est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ dans $[\sqrt{2};+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{2t\,dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt$$

  sont de même nature (convergentes) et égales.

- *Calculons l'intégrale de droite par décomposition*

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

  Après simplification

$$I = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

Exercice I.11. *Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$. Que peut-on en déduire?*

II. Variables aléatoires à densité

II.1 Définitions et premières propriétés

Définition II.1 (variable aléatoire à densité)**.** *Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Notons F_X la fonction de répartition de X. On dit que X est une variable aléatoire à densité si :*

- *F_X est continue sur $\mathbb{R}$.*
- *F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*

Exemple II.2.

- *Si F_X vérifie :*

$$\forall x \in]-\infty; 0[, F_X(x) = 0, \quad \forall x \in [0; 1], F_X(x) = x, \quad \forall x \in]1; +\infty[, F_X(x) = 1,$$

  alors X est une variable à densité. On dira dans la suite que X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

- *Les variables aléatoires discrètes ne sont pas des variables à densité.*

Remarque II.3. *Soit X une variable aléatoire et F_X sa fonction de répartition. Nous avons vu que pour tous réels a, b avec $a < b$,*

$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a < X \leq b).$$

De plus, on montre que

$$\mathbb{P}(X = b) = F_X(b) - \lim_{a \to b^-} F_X(a).$$

Preuve. En effet, on a par exemple $[X = b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]b - 1/n < X \leq b]$. La suite d'événements $(]b - 1/n < X \leq b])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'inclusion, le théorème de la limite monotone dans sa version probabiliste s'applique. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X = b) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(b - 1/n < X \leq b) = F_X(b) - \lim_{n \to +\infty} F_X(b - 1/n).$$

On conclut en rappelant que la fonction de répartition est continue à gauche.

Si X est une variable aléatoire à densité, F_X est continue. En particulier, pour $b \in \mathbb{R}$: $\mathbb{P}(X = b) = 0$. Plus généralement, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X \in]a; b]) = \mathbb{P}(X \in [a; b]) = \mathbb{P}(X \in]a; b[) = \mathbb{P}(X \in [a; b[).$$

Définition II.4 (densité de probabilité)**.** *On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une densité de probabilité si elle vérifie :*

- *f est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.*
- *L'intégrale suivante est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$.*

Remarque II.5. *On démontre (et nous admettons) que toute fonction f positive, continue sauf en un nombre fini de points, intégrable sur $\mathbb{R}$ d'intégrale égale à 1 est une densité de probabilité.*

Exemple II.6. *Justifions que la fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\pi(1+t^2)}$ définit une densité de probabilité.*

- *f est clairement une fonction positive.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas.*