I. Rappels : intégrales généralisées

I.1 Convergence et convergence absolue

Définition I.1 (intégrale généralisée en b)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite divergente.

Remarque I.2.

- *La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.*
- *Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Théorème I.3 (convergence absolue)**.** *$\int_a^b f(t)\,dt$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente. De plus, si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque I.4. *Attention. La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.*

I.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.

Proposition I.5 (critère de comparaison et de négligeabilité)**.** *Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.*

- *Si*
  - *f et g sont positives,*
  - *pour tout $x \in [a,b[$, $f(x) \leq g(x)$,*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.
- *Si*
  - *g est positive sur un voisinage de b;*
  - *$f = o(g)$;*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.

Proposition I.6 (critère d'équivalence)**.** *Soient f, g deux applications continues définies sur $[a,b[$. Si*

- *f et g sont de signe constant sur un voisinage de b,*
- *$f \sim g$,*

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Remarque I.7. *En pratique, on compare souvent aux intégrales de Riemann.*

- *L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;*
- *L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.*

I.3 Règles de calculs

Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

Théorème I.8 (changement de variable)**.** *Soit f continue sur un intervalle $]a;b[$. Si $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$, alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u)\,du$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence,*

$$\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t))\,dt.$$

Remarque I.9. *L'énoncé s'étend au cas décroissant.*

Méthode I.10 (Rédiger un changement de variable dans le cas généralisé)**.** *Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.*

- *La fonction $x \in [0;+\infty[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, I est une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} \sim \frac{1}{e^{x/2}}.$$

  Comme $\int_0^{+\infty} e^{-x/2}\,dx$ est convergente, par le critère d'équivalence pour des intégrandes positives, I est convergente.

- *Soit $\varphi : x \in [0;+\infty[\mapsto \sqrt{1+e^x}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$ par composition. De plus,*

$$\varphi(0) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

  φ est une bijection croissante de $[0;+\infty[$ dans $[\sqrt{2};+\infty[$. Par le théorème de changement de variable, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{1}{t}\frac{2t\,dt}{t^2-1} = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt$$

  sont de même nature (convergentes) et égales.

- *Calculons l'intégrale de droite par décomposition*

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{2}}^{+\infty} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

  Après simplification

$$I = 2\ln(\sqrt{2}+1).$$

Exercice I.11. *Effectuer le changement de variable $u = 1/t$ dans l'intégrale convergente $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$. Que peut-on en déduire?*