I. Rappels : intégrales généralisées

I.1 Convergence et convergence absolue

Définition I.1 (intégrale généralisée en b)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.*
L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $[a;b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite divergente.

Remarque I.2.

- *La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.*
- *Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. L'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est notée $\int_a^b f(t)\,dt$. Elle est dite convergente si pour un réel $c \in]a,b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Théorème I.3 (convergence absolue)**.** *$\int_a^b f(t)\,dt$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente. De plus, si $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Remarque I.4. *Attention. La réciproque est fausse. Il existe des intégrales généralisées convergentes sans être absolument convergente.*

I.2 Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a;b[\mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée.

Proposition I.5 (critère de comparaison et de négligeabilité)**.** *Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a,b[$.*

- *Si*
  - *f et g sont positives,*
  - *pour tout $x \in [a,b[$, $f(x) \leq g(x)$,*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.
- *Si*
  - *g est positive sur un voisinage de b;*
  - *$f = o(g)$;*
  - *$\int_a^b g(t)\,dt$ est convergente,*

  alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est aussi convergente.

Proposition I.6 (critère d'équivalence)**.** *Soient f, g deux applications continues définies sur $[a,b[$. Si*