IV.2 Existence d'une solution définie comme limite uniforme d'une suite de Cauchy

On cherche à construire une application X vérifiant $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X(u) + B(u))\,du$ pour tout $t \in I$. Introduisons pour cela la suite vectorielle de fonctions définies sur I par :

$$\forall t \in I, \quad X_0(t) = X(t_0), \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1}(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X_k(u) + B(u))\,du$$

Une simple récurrence montre que $X_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous allons prouver que cette suite de fonctions $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la solution X recherchée en travaillant d'abord sur un intervalle I compact, de la forme $[t_0 - a, t_0 + b]$, où $a, b \geq 0$. On munit donc $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ de la norme de convergence uniforme définie par $\|Y\|_\infty = \sup_{t\in I}\|Y(t)\|$, cette dernière étant parfaitement définie compte tenu de la compacité de I.

Théorème IV.2. *La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une solution du problème de Cauchy intégral $(**)$.*

Éléments de preuve.

- Étape 1 – On commence par prouver que l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, i.e. que toute suite de Cauchy converge. Soit en effet $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad \|Y_p - Y_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$ et $t \in I = [t_0 - a, t_0 + b]$, $\|Y_p(t) - Y_q(t)\| \leq \varepsilon$. La suite $(Y_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}^n$ donc elle converge vers un vecteur noté $Y(t)$, ce qui assure la convergence simple de la suite de fonctions $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, en faisant tendre q vers $+\infty$,

$$\forall p \geq N, \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + b], \quad \|Y_p(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{soit} \quad \|Y_p - Y\|_\infty \leq \varepsilon$$

La suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur I vers Y, qui est de ce fait une fonction continue.

- Étape 2 – On montre que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en établissant au préalable par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in I, \quad \|X_p(t) - X_{p-1}(t)\| \leq \frac{\lambda C^{p-1}|t - t_0|^p}{p!}$$

où l'on a noté $\lambda = \|AX_0 + B\|_\infty$ et $C = \sup_{u\in I}\|A(u)\|$, cette dernière quantité étant définie par continuité de $\|A\|$ sur le compact I. L'initialisation est chose aisée :

$$\forall t \in I, \quad \|X_1(t) - X_0(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)X_0 + B(u)\|\,du\right| \leq \lambda|t - t_0|$$

Supposons le résultat établi au rang p et prouvons-le au rang $p + 1$.

$$\forall t \in I, \quad \|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)\| \cdot \|X_p(u) - X_{p-1}(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda C^p|u - t_0|^p}{p!}\,du\right|$$

Donc pour tout $t \in I$, $\|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \frac{\lambda C^p|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}$ (ce qu'on voulait!). Or $I = [t_0 - a, t_0 + b]$, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \|X_p - X_{p-1}\|_\infty \leq \frac{\lambda C^{p-1} \max(a,b)^p}{p!}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ où $p \geq q$, par inégalité triangulaire,

$$\|X_p - X_q\|_\infty \leq \sum_{k=q+1}^{p} \|X_k - X_{k-1}\|_\infty \leq \lambda \sum_{k=q+1}^{p} \frac{C^{k-1} \max(a,b)^k}{k!} \leq \lambda \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{C^{k-1} \max(a,b)^k}{k!}$$

Cette dernière somme est le reste d'une série convergente (série exponentielle) donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p \geq q \geq N$, $\|X_p - X_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

- Étape 3 – La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, elle converge dans $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ vers $X \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$.

  La convergence uniforme assure le passage à la limite sous l'intégrale dans la relation de récurrence :

$$X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\, du, \quad X \text{ est solution sur } I = [t_0 - a, t_0 + b].$$

□

Lorsque I est un intervalle quelconque, on construit une solution en considérant pour tout segment contenant t_0 l'unique solution du problème de Cauchy sur ce segment. Une telle définition fait sens puisque si $J, J' \subset I$ sont deux segments contenant t_0, la solution sera unique sur $J \cap J'$.