# IV. Une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (HP)

Par la suite, $I$ désignera à nouveau un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues sur $I$. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de la solution, pour tous $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, au problème de Cauchy linéaire :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0 \quad (*)$$

Une preuve classique consiste à travailler avec la formulation intégrale du problème (qui lui est équivalente) :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\, du \quad (**)$$

Nous munissons $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et introduisons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme subordonnée associée, notée $\|\cdot\|$.

## IV.1 Unicité de la solution par le lemme de Grönwall

Commençons par énoncer une inégalité centrale dans la justification de l'unicité de la solution.

**Lemme IV.1** (Inégalité de Grönwall)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ supposées continues.*
*Supposons de plus que $g$ est positive et que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du$.*
*Alors, pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.*

Éléments de preuve. Il suffit de prouver que $f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right) \leq \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$ $a$.
Posons pour cela : $\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.
L'application $\varphi$ est dérivable sur $I$ et pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$,

$$\varphi'(t) = \underbrace{\left[f(t) - \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\right]}_{\leq 0} \times \underbrace{g(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)}_{\geq 0} \leq 0$$

L'application $\varphi$ étant décroissante, $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) = a$ pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$. □

On adapte alors cette dernière démonstration pour justifier la variante symétrisée de l'inégalité de Grönwall :

$$\left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a + \left|\int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right|\right] \implies \left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a\exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right|\right)\right]$$

Considérons maintenant deux solutions $X_1$ et $X_2$ au problème de Cauchy intégral $(**)$. $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ donc :

$$\forall t \in I, \quad X_2(t) - X_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)(X_2(u) - X_1(u))\, du$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $t \in I$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\| \cdot \|X_2(u) - X_1(u)\|\, du\right|$.
Les applications $f = \|X_2 - X_1\|$ et $g = \|A\|$ sont de plus continues et positive pour la seconde. Les conditions d'application du lemme de Grönwall étant réunies, on obtient pour $a = 0$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq 0$ pour tout $t \in I$. Nous venons d'établir l'égalité $X_1 = X_2$, c'est-à-dire l'unicité de la solution.

## IV.2 Existence d'une solution définie comme limite uniforme d'une suite de Cauchy

On cherche à construire une application $X$ vérifiant $X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X(u) + B(u))\,du$ pour tout $t \in I$. Introduisons pour cela la suite vectorielle de fonctions définies sur $I$ par :

$$\forall t \in I, \quad X_0(t) = X(t_0), \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1}(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t}(A(u)X_k(u) + B(u))\,du$$

Une simple récurrence montre que $X_k \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Nous allons prouver que cette suite de fonctions $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la solution $X$ recherchée en travaillant d'abord sur un intervalle $I$ compact, de la forme $[t_0 - a, t_0 + b]$, où $a, b \geq 0$. On munit donc $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ de la norme de convergence uniforme définie par $\|Y\|_\infty = \sup_{t\in I}\|Y(t)\|$, cette dernière étant parfaitement définie compte tenu de la compacité de $I$.

**Théorème IV.2.** *La suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une solution du problème de Cauchy intégral $(**)$.*

Éléments de preuve.

- Étape 1 – On commence par prouver que l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n), \|\cdot\|_\infty)$ est complet, i.e. que toute suite de Cauchy converge. Soit en effet $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq N, \quad \|Y_p - Y_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$ et $t \in I = [t_0 - a, t_0 + b]$, $\|Y_p(t) - Y_q(t)\| \leq \varepsilon$. La suite $(Y_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}^n$ donc elle converge vers un vecteur noté $Y(t)$, ce qui assure la convergence simple de la suite de fonctions $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, en faisant tendre $q$ vers $+\infty$,

$$\forall p \geq N, \quad \forall t \in [t_0 - a, t_0 + b], \quad \|Y_p(t) - Y(t)\| \leq \varepsilon \quad \text{soit} \quad \|Y_p - Y\|_\infty \leq \varepsilon$$

La suite $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $I$ vers $Y$, qui est de ce fait une fonction continue.

- Étape 2 – On montre que la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy en établissant au préalable par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in I, \quad \|X_p(t) - X_{p-1}(t)\| \leq \frac{\lambda C^{p-1}|t - t_0|^p}{p!}$$

où l'on a noté $\lambda = \|AX_0 + B\|_\infty$ et $C = \sup_{u\in I}\|A(u)\|$, cette dernière quantité étant définie par continuité de $\|A\|$ sur le compact $I$. L'initialisation est chose aisée :

$$\forall t \in I, \quad \|X_1(t) - X_0(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)X_0 + B(u)\|\,du\right| \leq \lambda|t - t_0|$$

Supposons le résultat établi au rang $p$ et prouvons-le au rang $p + 1$.

$$\forall t \in I, \quad \|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\|A(u)\| \cdot \|X_p(u) - X_{p-1}(u)\|\,du\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t}\frac{\lambda C^p|u - t_0|^p}{p!}\,du\right|$$

Donc pour tout $t \in I$, $\|X_{p+1}(t) - X_p(t)\| \leq \frac{\lambda C^p|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!}$ (ce qu'on voulait!). Or $I = [t_0 - a, t_0 + b]$, donc :