- le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

$$\exists t_0 \in I, \quad W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & \cdots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemple III.6. $(\cos \circ \ln, \sin \circ \ln)$ *est un système fondamental de solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t^2y''+ty'+y=0$ *puisque les deux fonctions sont (avant tout!) bien solutions et, par exemple,* $W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

On retrouve aisément le résultat précédent en vérifiant que le wronskien est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1. Par multilinéarité du déterminant, si x_1 et x_2 sont deux solutions sur I de l'équation différentielle $x'' = a_0(t)x + a_1(t)x'$ et $t \in I$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} = a_1(t) \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi, $W'(t) = a_1(t)W(t)$. La preuve se généralise facilement pour une équation différentielle d'ordre n :

$$W'(t) = a_{n-1}W(t) \quad \text{soit} \quad W(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(u)\,du\right) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} (A(u))\,du\right) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

D'où le fait que W est nul sur I ou bien ne s'annule jamais.
La méthode de variation des constantes permet, une fois connu un système fondamental de solutions, de résoudre l'équation différentielle avec second membre $x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + b(t)$. Explicitons le cas particulier des équations différentielles d'ordre 2 de la forme $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, seul cas à connaître. Cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$$

Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de l'équation d'ordre 2, d'après ce qui précède,

$$\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t) \iff \begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Connaissant $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il s'agit alors de résoudre un système linéaire avant de primitiver.

Exercice III.7. 1. *Résoudre l'équation différentielle* $y''(t)+y(t) = \tan(t)$ *sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. *Donner une expression intégrale des solutions de l'équation* $y''(t) + y(t) = f(t)$ *où* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

III.6 Résolution effective des systèmes linéaires à coefficients constants

On restreint désormais notre étude aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, pour lesquels nous sommes en mesure d'expliciter les solutions à l'aide de l'exponentielle matricielle.

III.6.1 Résolution générale du système différentiel linéaire $X' = AX + B$

Théorème III.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'équation homogène $X' = AX$ admet pour solution générale $X : t \mapsto e^{tA}C$ où $C \in \mathbb{K}^n$.*
On rappelle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\exp(M)$ est inversible, d'inverse $\exp(-M)$.

Éléments de preuve. Il suffit de dériver $\phi : t \mapsto e^{-tA}X(t)$ sur l'intervalle I. $\phi'(t) = e^{-tA}(X'(t) - AX(t)) = 0$, d'où le résultat.
Le problème de Cauchy $X'(t) = AX(t)$ et $X(t_0) = X_0$ admet comme unique solution $X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0$. □

On peut facilement en déduire l'unique solution de l'équation complète $X' = AX + B$ en faisant varier la constante (l'expression n'est pas à retenir) :

$$X'(t) = AX(t)+B(t) \iff e^{tA}C'(t) = B(t) \iff C(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-sA}B(s)\,ds+C(t_0) \iff X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0+e^{tA}$$

III.6.2 Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Les solutions de l'équation homogène $X' = AX$ sont de la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \exp(tA)C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{K}^n$$

En notant $(X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A, on peut écrire $C = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$ avec $C_i \in \mathbb{K}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(tA)X_i = \sum_{i=1}^{n} C_i \exp(\lambda_i t)X_i$$

On vient d'établir LE résultat que l'on utilisera en pratique pour résoudre un système différentiel à coefficients constants dans le cas diagonalisable :

Théorème III.9. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Il existe alors une base $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, éventuellement multiples.*
Les solutions de l'équation $X' = AX$ sont de la forme :

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}X_n \quad \textit{avec} \quad C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}$$

On peut retrouver ce résultat rapidement, sans recours à l'exponentielle de matrices, comme on l'a fait dans le premier chapitre de réduction :

$$X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY \text{ avec } Y = P^{-1}X$$

Ainsi, pour tout $i \in [1, n]$, $y_i'(t) = \lambda_i y_i(t)$ donc $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$ avec $C_i \in \mathbb{R}$. D'où le résultat suivant :

$$X(t) = PY(t) = P \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t}X_1 + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}X_n$$

On notera l'inutilité de calculer $\exp(tA)$. Cela reste vrai dans le cas où la matrice serait (seulement) trigonalisable. On se reportera au premier chapitre de réduction pour les détails pratiques.

IV. Une preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (HP)

Par la suite, I désignera à nouveau un intervalle et $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ deux applications continues sur I. On cherche à prouver l'existence et l'unicité de la solution, pour tous $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, au problème de Cauchy linéaire :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0 \quad (*)$$

Une preuve classique consiste à travailler avec la formulation intégrale du problème (qui lui est équivalente) :

$$\forall t \in I, \quad X(t) = X(t_0) + \int_{t_0}^{t} (A(u)X(u) + B(u))\, du \quad (**)$$

Nous munissons $\mathbb{K}^n$ d'une norme $\|\cdot\|$ et introduisons sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme subordonnée associée, notée $\|\cdot\|$.

IV.1 Unicité de la solution par le lemme de Grönwall

Commençons par énoncer une inégalité centrale dans la justification de l'unicité de la solution.

Lemme IV.1 (Inégalité de Grönwall)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ supposées continues.*
Supposons de plus que g est positive et que pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du$.
Alors, pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $f(t) \leq a \exp\left(\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.

Éléments de preuve. Il suffit de prouver que $f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right) \leq \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$ a.
Posons pour cela : $\forall t \in I, \quad \varphi(t) = \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)$.
L'application φ est dérivable sur I et pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$,

$$\varphi'(t) = \underbrace{\left[f(t) - \left(a + \int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right)\right]}_{\leq 0} \times \underbrace{g(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right)}_{\geq 0} \leq 0$$

L'application φ étant décroissante, $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) = a$ pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$. □

On adapte alors cette dernière démonstration pour justifier la variante symétrisée de l'inégalité de Grönwall :

$$\left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a + \left|\int_{t_0}^{t} f(u)g(u)\, du\right|\right] \implies \left[\forall t \in I, \quad f(t) \leq a\exp\left(\left|\int_{t_0}^{t} g(u)\, du\right|\right)\right]$$

Considérons maintenant deux solutions X_1 et X_2 au problème de Cauchy intégral $(**)$. $X_1(t_0) = X_2(t_0)$ donc :

$$\forall t \in I, \quad X_2(t) - X_1(t) = \int_{t_0}^{t} A(u)(X_2(u) - X_1(u))\, du$$

Par inégalité triangulaire, pour tout $t \in I$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq \left|\int_{t_0}^{t} \|A(u)\| \cdot \|X_2(u) - X_1(u)\|\, du\right|$.
Les applications $f = \|X_2 - X_1\|$ et $g = \|A\|$ sont de plus continues et positive pour la seconde. Les conditions d'application du lemme de Grönwall étant réunies, on obtient pour $a = 0$, $\|X_2(t) - X_1(t)\| \leq 0$ pour tout $t \in I$. Nous venons d'établir l'égalité $X_1 = X_2$, c'est-à-dire l'unicité de la solution.