Même si nous en aurons un usage essentiellement limité aux équations linéaires d'ordre 2, le wronskien est un outil commode pour déterminer si une famille de solutions forme un système fondamental.

Définition III.5 (Wronskien)**.** *On appelle wronskien d'une famille de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ du système $X' = A(t)X$, l'application :*

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

D'après ce qui précède,

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ est un système fondamental} \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0 \iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$$

III.4 Solutions du système complet et méthode de variation des constantes

Revenons au système différentiel à coefficients continus $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathbb{K}^n$.
Supposons connu un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de l'équation homogène. Toute solution de l'équation homogène s'écrit ainsi sous la forme :

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

On cherche désormais les solutions de l'équation complète sous la forme $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$ où les fonctions λ_i sont supposées dérivables sur l'intervalle de résolution I.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour t fixé, les coefficients $\lambda_1'(t), \dots, \lambda_n'(t)$ s'interprètent alors comme les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans la base $(X_1(t), \dots, X_n(t))$.
Ainsi, si l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène (ce qui n'est pas acquis!), on peut résoudre l'équation complète en déterminant les fonctions λ_i par primitivation directe des coordonnées de B. En pratique, les calculs sont néanmoins vite pénibles et nous n'en n'abuserons pas...

III.5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1}x^{(n-1)} \iff X' = AX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice A est parfois appelée matrice compagnon du système homogène $X' = A(t)X$. Sous réserve de continuité de A, c'est-à-dire lorsque les fonctions $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont continues,

- les solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle donné forment un espace vectoriel de dimension n.

- le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} \\ x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

admet une et une seule solution.

$$\exists t_0 \in I, \quad W(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) \\ x_1'(t_0) & \cdots & x_n'(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t_0) & \cdots & x_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Exemple III.6. $(\cos \circ \ln, \sin \circ \ln)$ *est un système fondamental de solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t^2y''+ty'+y=0$ *puisque les deux fonctions sont (avant tout!) bien solutions et, par exemple,* $W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

On retrouve aisément le résultat précédent en vérifiant que le wronskien est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1. Par multilinéarité du déterminant, si x_1 et x_2 sont deux solutions sur I de l'équation différentielle $x'' = a_0(t)x + a_1(t)x'$ et $t \in I$,

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} \quad \text{donc} \quad W'(t) = \begin{vmatrix} x_1'(t) & x_2'(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1''(t) & x_2''(t) \end{vmatrix} = a_1(t) \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

Ainsi, $W'(t) = a_1(t)W(t)$. La preuve se généralise facilement pour une équation différentielle d'ordre n :

$$W'(t) = a_{n-1}W(t) \quad \text{soit} \quad W(t) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(u)\,du\right) = \lambda \exp\left(\int_{t_0}^{t} (A(u))\,du\right) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

D'où le fait que W est nul sur I ou bien ne s'annule jamais.
La méthode de variation des constantes permet, une fois connu un système fondamental de solutions, de résoudre l'équation différentielle avec second membre $x^{(n)} = a_0(t)x + a_1(t)x' + \cdots + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + b(t)$. Explicitons le cas particulier des équations différentielles d'ordre 2 de la forme $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$, seul cas à connaître. Cette dernière équation se réécrit sous la forme :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c(t) \end{bmatrix}$$

Si (x_1, x_2) est un système fondamental de solutions de l'équation d'ordre 2, d'après ce qui précède,

$$\lambda_1'(t)X_1(t) + \lambda_2'(t)X_2(t) = B(t) \iff \begin{cases} \lambda_1'(t)x_1(t) + \lambda_2'(t)x_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)x_1'(t) + \lambda_2'(t)x_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Connaissant $x_1(t)$ et $x_2(t)$, il s'agit alors de résoudre un système linéaire avant de primitiver.

Exercice III.7. 1. *Résoudre l'équation différentielle* $y''(t)+y(t) = \tan(t)$ *sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

2. *Donner une expression intégrale des solutions de l'équation* $y''(t) + y(t) = f(t)$ *où* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

III.6 Résolution effective des systèmes linéaires à coefficients constants

On restreint désormais notre étude aux systèmes différentiels linéaires à coefficients constants, pour lesquels nous sommes en mesure d'expliciter les solutions à l'aide de l'exponentielle matricielle.