Même si nous en aurons un usage essentiellement limité aux équations linéaires d'ordre 2, le wronskien est un outil commode pour déterminer si une famille de solutions forme un système fondamental.

Définition III.5 (Wronskien)**.** *On appelle wronskien d'une famille de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ du système $X' = A(t)X$, l'application :*

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

D'après ce qui précède,

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ est un système fondamental} \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0 \iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$$

III.4 Solutions du système complet et méthode de variation des constantes

Revenons au système différentiel à coefficients continus $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathbb{K}^n$.
Supposons connu un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de l'équation homogène. Toute solution de l'équation homogène s'écrit ainsi sous la forme :

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

On cherche désormais les solutions de l'équation complète sous la forme $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$ où les fonctions λ_i sont supposées dérivables sur l'intervalle de résolution I.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour t fixé, les coefficients $\lambda_1'(t), \dots, \lambda_n'(t)$ s'interprètent alors comme les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans la base $(X_1(t), \dots, X_n(t))$.
Ainsi, si l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène (ce qui n'est pas acquis!), on peut résoudre l'équation complète en déterminant les fonctions λ_i par primitivation directe des coordonnées de B. En pratique, les calculs sont néanmoins vite pénibles et nous n'en n'abuserons pas...

III.5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1}x^{(n-1)} \iff X' = AX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice A est parfois appelée matrice compagnon du système homogène $X' = A(t)X$. Sous réserve de continuité de A, c'est-à-dire lorsque les fonctions $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont continues,

- les solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle donné forment un espace vectoriel de dimension n.