- *l'ensemble S_H des solutions de $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n ;*
- *l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction S_H.*

La démonstration de ce résultat phare est hors programme mais une preuve figure à la fin de ce cours.

Exemple III.3. *Si X est une solution de l'équation homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$,*

$$\exists t_0 \in I, \quad X(t_0) = 0 \iff \forall t \in I, \quad X(t) = 0$$

Éléments de preuve. • Cas du système homogène

La fonction nulle (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) est évidemment solution du système et si X_1 et X_2 sont deux solutions, λ un scalaire, alors $\lambda X_1 + X_2$ est encore solution :

$$A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda X_1' + X_2' = (\lambda X_1 + X_2)'$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $X \to X(t_0)$ établit un isomorphisme entre S_H et $\mathbb{K}^n$ en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. S_H est donc un espace vectoriel de dimension n.

- Cas du système avec second membre

Supposons que X_p soit une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$.

$$\begin{aligned} \tilde{X} \text{ solution du système complet} &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + B \\ &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + (X_p' - AX_p) \\ &\iff (\tilde{X} - X_p)' = A(\tilde{X} - X_p) \\ &\iff \tilde{X} - X_p \text{ solution du système homogène} \end{aligned}$$

X est bien la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.

□

III.3 Système fondamental de solutions du système homogène et wronskien

Toute solution du système homogène à coefficients continus $X' = A(t)X$ s'écrit comme combinaison linéaire d'une base $(X_1, \dots, X_n)$ de l'espace des solutions. Cette base est qualifiée de système fondamental de solutions.

Théorème III.4. *Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue sur l'intervalle I et $X_1, \dots, X_n$ des solutions du système $X' = A(t)X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions ;

(ii) pour tout $t \in I$, $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$;

(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.

Éléments de preuve. Ce résultat est une nouvelle conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz en considérant, pour tout $t \in I$, l'isomorphisme :

$$\varphi_t : S_H \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad X \longmapsto X(t)$$

L'image d'une base de solutions (donc d'un système fondamental) par φ_t est une base de $\mathbb{K}^n$. □

Même si nous en aurons un usage essentiellement limité aux équations linéaires d'ordre 2, le wronskien est un outil commode pour déterminer si une famille de solutions forme un système fondamental.

Définition III.5 (Wronskien)**.** *On appelle wronskien d'une famille de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ du système $X' = A(t)X$, l'application :*

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

D'après ce qui précède,

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ est un système fondamental} \iff \forall t \in I, W(t) \neq 0 \iff \exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$$

III.4 Solutions du système complet et méthode de variation des constantes

Revenons au système différentiel à coefficients continus $X' = A(t)X + B(t)$ avec $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathbb{K}^n$.
Supposons connu un système fondamental $(X_1, \dots, X_n)$ de solutions de l'équation homogène. Toute solution de l'équation homogène s'écrit ainsi sous la forme :

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

On cherche désormais les solutions de l'équation complète sous la forme $X(t) = \lambda_1(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n(t)X_n(t)$ où les fonctions λ_i sont supposées dérivables sur l'intervalle de résolution I.

$$X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1'(t)X_1(t) + \cdots + \lambda_n'(t)X_n(t) = B(t)$$

Pour t fixé, les coefficients $\lambda_1'(t), \dots, \lambda_n'(t)$ s'interprètent alors comme les coordonnées du vecteur $B(t)$ dans la base $(X_1(t), \dots, X_n(t))$.
Ainsi, si l'on connaît un système fondamental de solutions de l'équation homogène (ce qui n'est pas acquis!), on peut résoudre l'équation complète en déterminant les fonctions λ_i par primitivation directe des coordonnées de B. En pratique, les calculs sont néanmoins vite pénibles et nous n'en n'abuserons pas...

III.5 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n

L'étude des systèmes différentiels est en partie motivée par le fait que toute équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n se ramène, au moyen de l'équivalence suivante, à un système différentiel linéaire d'ordre 1 :

$$x^{(n)} = a_0 x + a_1 x' + \cdots + a_{n-1}x^{(n-1)} \iff X' = AX \text{ avec } X = \begin{bmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix} \text{ et } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}$$

La matrice A est parfois appelée matrice compagnon du système homogène $X' = A(t)X$. Sous réserve de continuité de A, c'est-à-dire lorsque les fonctions $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont continues,

- les solutions de l'équation $X' = AX$ sur un intervalle donné forment un espace vectoriel de dimension n.