*Ainsi,* $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, *et donc,*

$$z(x) = B\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) + C \text{ avec } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

*Enfin,* $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ *avec* $A'', B \in \mathbb{R}$. *On a obtenu l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(et non* $\mathbb{R}^*$*).*

**Changements de variable et d'inconnue (en principe fournis par l'énoncé)**

**Exercice II.13.** *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+$ *l'équation différentielle* $x^2y'' + y = 0$ *en posant* $t = \ln(x)$.

# III. Étude générale des systèmes différentiels linéaires

## III.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n); \quad A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$$

On suppose par la suite que les fonctions vectorielles $A$ et $B$ sont continues sur l'intervalle $I$.

**Exemple III.1.**

$\begin{cases} x' = 3\cos(t)x - y + 2 \\ y' = x + ty - t^2 \end{cases}$ *peut s'écrire* $X' = AX + B$ *avec* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 3\cos(t) & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t^2 \end{bmatrix}$.

On appelle solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ toute fonction vectorielle $u \in \mathcal{F}^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ sur l'intervalle $I$.
On peut écrire le système $X' = AX + B$ sous une forme vectorielle, moins commode que la forme matricielle :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}(I, E)$$

## III.2 Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy

À l'exception de quelques cas particuliers comme les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. section suivante) ou les équations scalaires d'ordre 1 (cf. section précédente), il n'est pas possible de résoudre de manière générale un système en explicitant ses solutions. Cela n'empêche nullement d'établir l'existence de telles solutions, leur éventuelle unicité si l'on rajoute des contraintes, et plus généralement leurs propriétés.

**Théorème III.2** (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Lorsque* $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I \to \mathbb{K}^n$ *sont continues sur l'intervalle* $I$*,*

- *l'ensemble $S_H$ des solutions de $X' = A(t)X$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension $n$ ;*
- *l'ensemble des solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ de direction $S_H$.*

La démonstration de ce résultat phare est hors programme mais une preuve figure à la fin de ce cours.

**Exemple III.3.** *Si $X$ est une solution de l'équation homogène $X'(t) = A(t)X(t)$ avec $A \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$,*

$$\exists t_0 \in I, \quad X(t_0) = 0 \iff \forall t \in I, \quad X(t) = 0$$

Éléments de preuve. • Cas du système homogène

La fonction nulle (à valeurs dans $\mathbb{K}^n$) est évidemment solution du système et si $X_1$ et $X_2$ sont deux solutions, $\lambda$ un scalaire, alors $\lambda X_1 + X_2$ est encore solution :

$$A(\lambda X_1 + X_2) = \lambda A X_1 + A X_2 = \lambda X_1' + X_2' = (\lambda X_1 + X_2)'$$

Pour tout $t_0 \in I$, l'application $X \to X(t_0)$ établit un isomorphisme entre $S_H$ et $\mathbb{K}^n$ en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire. $S_H$ est donc un espace vectoriel de dimension $n$.

- Cas du système avec second membre

Supposons que $X_p$ soit une solution particulière du système différentiel $X' = AX + B$.

$$\begin{aligned} \tilde{X} \text{ solution du système complet} &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + B \\ &\iff \tilde{X}' = A\tilde{X} + (X_p' - AX_p) \\ &\iff (\tilde{X} - X_p)' = A(\tilde{X} - X_p) \\ &\iff \tilde{X} - X_p \text{ solution du système homogène} \end{aligned}$$

$X$ est bien la somme d'une solution particulière et de la solution générale du système homogène.

□

## III.3 Système fondamental de solutions du système homogène et wronskien

Toute solution du système homogène à coefficients continus $X' = A(t)X$ s'écrit comme combinaison linéaire d'une base $(X_1, \dots, X_n)$ de l'espace des solutions. Cette base est qualifiée de système fondamental de solutions.

**Théorème III.4.** *Soient $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ continue sur l'intervalle $I$ et $X_1, \dots, X_n$ des solutions du système $X' = A(t)X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(i) $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions ;*

*(ii) pour tout $t \in I$, $(X_1(t), \dots, X_n(t))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ ;*

*(iii) il existe $t_0 \in I$ tel que $(X_1(t_0), \dots, X_n(t_0))$ soit une base de $\mathbb{K}^n$.*

Éléments de preuve. Ce résultat est une nouvelle conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz en considérant, pour tout $t \in I$, l'isomorphisme :

$$\varphi_t : S_H \longrightarrow \mathbb{K}^n, \quad X \longmapsto X(t)$$

L'image d'une base de solutions (donc d'un système fondamental) par $\varphi_t$ est une base de $\mathbb{K}^n$. □