Ainsi, $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, *et donc,*

$$z(x) = B\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) + C \text{ avec } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Enfin, $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ *avec* $A'', B \in \mathbb{R}$. *On a obtenu l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(et non* $\mathbb{R}^*$*).*

Changements de variable et d'inconnue (en principe fournis par l'énoncé)

Exercice II.13. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+$ *l'équation différentielle* $x^2y'' + y = 0$ *en posant* $t = \ln(x)$.

III. Étude générale des systèmes différentiels linéaires

III.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n); \quad A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$$

On suppose par la suite que les fonctions vectorielles A et B sont continues sur l'intervalle I.

Exemple III.1.

$\begin{cases} x' = 3\cos(t)x - y + 2 \\ y' = x + ty - t^2 \end{cases}$ *peut s'écrire* $X' = AX + B$ *avec* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 3\cos(t) & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t^2 \end{bmatrix}$.

On appelle solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ toute fonction vectorielle $u \in \mathcal{F}^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ sur l'intervalle I.
On peut écrire le système $X' = AX + B$ sous une forme vectorielle, moins commode que la forme matricielle :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}(I, E)$$

III.2 Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy

À l'exception de quelques cas particuliers comme les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. section suivante) ou les équations scalaires d'ordre 1 (cf. section précédente), il n'est pas possible de résoudre de manière générale un système en explicitant ses solutions. Cela n'empêche nullement d'établir l'existence de telles solutions, leur éventuelle unicité si l'on rajoute des contraintes, et plus généralement leurs propriétés.

Théorème III.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Lorsque* $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I \to \mathbb{K}^n$ *sont continues sur l'intervalle* I*,*