- *Recollement des solutions*

  Supposons que y soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E})$. L'application y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right) e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) e^{t} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

  Cela donne a priori de très nombreuses solutions! On peut en visualiser certaines sur le graphe ci-contre.

  y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et le sera sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$y(t) = C_1 - C_1 t + o(t) = C_2 + C_2 t + o(t)$$

  Par unicité du DL, on trouve $C_1 = C_2 = 0$. Il y a donc une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

II.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

II.2.1 Généralités

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues sur un intervalle I. Les résultats suivants sont provisoirement admis.

Théorème II.5 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0; \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Théorème II.6 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est un plan affine de direction S_H.*

Le plan de résolution d'une équation linéaire du second ordre ne diffère pas de celui du premier ordre.

Proposition II.7 (Principe de superposition)**.** *Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.*

II.2.2 Cas des équations différentielles à coefficients constants

On suppose ici que les fonctions a, b et c sont constantes réelles avec $a \neq 0$. (E) s'écrit sous la forme :

$$ay'' + by' + cy = d(t) \quad (E)$$

Théorème II.8 (Cas de l'équation homogène à coefficients constants)**.** *Soient l'équation* $ay'' + by' + cy = 0$ *et* Δ *le discriminant de l'équation caractéristique* $ar^2 + br + c = 0$.

- *Si* $\Delta > 0$*, on note* r_1 *et* r_2 *les deux racines réelles distinctes. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- *Si* $\Delta = 0$*, on note* r *la racine réelle double. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{rt} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

- *Si* $\Delta < 0$*, on note* $\alpha \pm i\beta$ *les deux racines complexes conjuguées. Les solutions sont de la forme :*

$$y(t) = (\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t))e^{\alpha t} \quad \textit{avec} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice II.9. *Résoudre les équations différentielles suivantes :*

$$y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y'' - 2y' + y = 0; \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Comme dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1, l'ensemble des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ est obtenu en recherchant une solution particulière de cette équation.
On est régulièrement appelé à déterminer une solution particulière lorsque le 2nd membre est de la forme :

- $d(t) = P(t)$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme d'un polynôme Q de même degré que P. Ex. : $y'' - 2y' + y = t^2$.

- $d(t) = P(t)e^{mt}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.
  On cherche une solution sous la forme $Q(t)e^{mt}$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(Q) = \deg(P) + k$, k étant l'ordre de multiplicité de m en tant que racine de l'équation caractéristique.

- $d(t) = \cos(\omega t)$ ou $d(t) = \sin(\omega t)$, on passe en complexe et on retrouve le cas précédent.

II.2.3 Cas des équations différentielles à coefficients non constants

Lorsque l'équation n'est pas à coefficients constants, il n'y a pas de méthode de résolution systématique. Voici cependant quelques techniques à connaître. On se laissera guider par l'énoncé dans la plupart des cas.

Recherche de solutions à l'aide de séries entières

Exemple II.10. *Résolvons l'équation* $(x^2+x)y''+(3x+1)y'+y=0$ *en posant* $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ *puis en dérivant terme à terme la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence (inconnu pour le moment). En injectant dans l'équation,*

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^n+\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n+\sum_{n=1}^{+\infty}3na_nx^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}[n(n-1)a_n+(n+1)na_{n+1}+3na_n+(n+1)a_{n+1}+a_n]x^n=0\\ \iff&\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2(a_{n+1}+a_n)x^n=0\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, il vient $a_{n+1}=-a_n$ *quel que soit* $n\in\mathbb{N}$*. On trouve alors* $a_n=(-1)^na_0$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et,*

$$\forall x\in]-1,1[,\quad y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_0(-x)^n=\frac{a_0}{1+x}$$

Les solutions déterminées seront alors définies sur un intervalle centré en 0. Toutes les solutions de l'équation n'étant pas nécessairement développables en série entière, il se peut que l'on obtienne seulement une partie des solutions. Dans l'exemple précédent, les solutions développables en série entière forment une droite vectorielle alors que l'espace vectoriel formé des solutions sur $]0,1[$ *est de dimension 2.*

Recherche de solutions de type polynomiales On pourra commencer par rechercher le degré d'une fonction polynomiale éventuellement solution, des conditions sur son coefficient dominant, sur ses racines...

Exemple II.11. *Considérons l'équation différentielle* $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$ *et cherchons une solution polynomiale de la forme* $P(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ *où* $n=\deg(P)$*, c'est-à-dire* $a_n\neq 0$*. Si* $n>0$*, le terme dominant de* $x(x+1)P''(x)+(x+2)P'(x)-P(x)$ *est* $(n^2-1)a_nx^n$*, donc* $n\leq 1$*. On peut donc poser* $P(x)=ax+b$ *et en injectant dans l'équation trouver* $b=2a$*, c'est-à-dire* $P(x)=a(x+2)$*.*

Factorisation par une solution déjà connue (méthode dite de Lagrange) Cette technique n'est rien d'autre qu'une adaptation de la méthode de variation de la constante. Si on connaît une solution y_0 de l'équation différentielle, on peut chercher une solution sous la forme $y=y_0z$. Une telle écriture nous ramène alors à la résolution d'une équation différentielle dont l'ordre est abaissé.

Exemple II.12. *Reprenons l'exemple de l'équation différentielle* $x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0$*. Posons* $y(x)=(x+2)z(x)$*.*

$$\begin{aligned}x(x+1)y''+(x+2)y'-y=0&\iff x(x+1)(x+2)z''(x)=-(3x^2+6x+4)z'(x)\\&\iff x(x+1)(x+2)z'(x)=-(3x^2+6x+4)z(x)\end{aligned}$$

en notant $Z(x)=z'(x)$*. Z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme :*

$$Z'(x)=\left(-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)Z(x)$$

Ainsi, $Z(x) = A \cdot \dfrac{x+1}{(x+2)^2x^2} = \dfrac{A}{4}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x+2)^2}\right)$, *et donc,*

$$z(x) = B\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}\right) + C \text{ avec } A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Enfin, $y(x) = \dfrac{A''}{x} + B(x+2)$ *avec* $A'', B \in \mathbb{R}$. *On a obtenu l'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(et non* $\mathbb{R}^*$*).*

Changements de variable et d'inconnue (en principe fournis par l'énoncé)

Exercice II.13. *Résoudre sur* $\mathbb{R}_+$ *l'équation différentielle* $x^2y'' + y = 0$ *en posant* $t = \ln(x)$.

III. Étude générale des systèmes différentiels linéaires

III.1 Systèmes différentiels linéaires à coefficients continus

Un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 est un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

On peut alors le mettre sous la forme $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n); \quad A : t \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K})); \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K}^n)$$

On suppose par la suite que les fonctions vectorielles A et B sont continues sur l'intervalle I.

Exemple III.1.

$\begin{cases} x' = 3\cos(t)x - y + 2 \\ y' = x + ty - t^2 \end{cases}$ *peut s'écrire* $X' = AX + B$ *avec* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $A(t) = \begin{bmatrix} 3\cos(t) & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$ *et* $B(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t^2 \end{bmatrix}$.

On appelle solution du système différentiel linéaire $X' = AX + B$ toute fonction vectorielle $u \in \mathcal{F}^1(I, \mathbb{R}^n)$ vérifiant $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ sur l'intervalle I.
On peut écrire le système $X' = AX + B$ sous une forme vectorielle, moins commode que la forme matricielle :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{avec} \quad a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E)) \quad \text{et} \quad b \in \mathcal{C}(I, E)$$

III.2 Structure de l'ensemble des solutions et problème de Cauchy

À l'exception de quelques cas particuliers comme les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (cf. section suivante) ou les équations scalaires d'ordre 1 (cf. section précédente), il n'est pas possible de résoudre de manière générale un système en explicitant ses solutions. Cela n'empêche nullement d'établir l'existence de telles solutions, leur éventuelle unicité si l'on rajoute des contraintes, et plus généralement leurs propriétés.

Théorème III.2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)**.** *Lorsque* $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B : I \to \mathbb{K}^n$ *sont continues sur l'intervalle* I*,*