II.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Commençons par exprimer les solutions des équations dites résolues, c'est-à-dire celles qui s'écrivent, sur un intervalle I, sous la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. On suppose les fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Théorème II.1. *Soit A une primitive de a supposée continue sur l'intervalle I.*

- *L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation complète.*

Éléments de preuve.

- Résolution de l'équation homogène par la méthode du facteur intégrant
  Soit y une solution sur I de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$. Posons alors $\phi(t) = y(t)e^{-A(t)}$. ϕ est dérivable et $\phi'(t) = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-A(t)} = 0$. ϕ est constante sur l'intervalle I et donc :

  $$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

  Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de l'équation.

- Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante
  On recherche les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Soit $t_0 \in I$.

  $$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \\ &\iff \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx + \lambda(t_0) \\ &\iff y(t) = \lambda(t_0)e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx \end{aligned}$$

  La fonction y est bien la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (dont on a même donné une forme explicite).

□

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues sur l'intervalle I. On déduit du théorème précédent les deux résultats fondamentaux suivants.

Corollaire II.2 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est une droite vectorielle;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est une droite affine de direction S_H.*

Point vocabulaire : on dira « Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions (de la forme) $t \to \ldots$ ».

Corollaire II.3 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

L'interprétation graphique est immédiate : par un point donné, passe une et une seule trajectoire. Autrement dit, les courbes représentatives de deux solutions ne peuvent s'intersecter. Si en revanche, a s'annule, tout est possible!
On notera en particulier que toute solution d'une équation différentielle de la forme $y'(t) + b(t)y(t) = 0$ qui s'annule une fois sur un intervalle donné y est « obligatoirement » entièrement nulle!

Plan de résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre :

1. Identification de l'équation.
2. Mise sous forme résolue (ou normalisée) en divisant par $a(t)$ sur les intervalles où a ne s'annule pas.
   Ex: $ty' - t^2y + \sin t = 0$. On résout l'équation $y' - ty + \frac{\sin t}{t} = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
3. Résolution de l'équation homogène: $y' = f(t)y$ avec f continue sur l'intervalle de résolution I.
   La solution générale de l'équation homogène est $t \mapsto \lambda e^{F(t)}$ où F est une primitive de f sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.
4. Résolution de l'équation avec second membre.
   On recherche pour cela une solution particulière y_p de (E). S'il n'y a pas de solution évidente, on utilise la méthode de la variation de la constante en cherchant y sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{F(t)}$. En injectant l'expression dans l'équation, on obtient une expression de λ' que l'on peut (bien souvent) primitiver. La solution générale de l'équation (E) est $y : t \mapsto \lambda e^{F(t)} + y_p(t)$.
   Ex: Résoudre $y' - xy = x$ en cherchant une solution particulière de deux façons différentes.
5. Raccordement éventuel des solutions.
   Ex: $y' + a(x)y = b(x)$ avec y_1 solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et y_2 solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction $y \mapsto \begin{cases} y_1(x) \text{ si } x < 0 \\ y_2(x) \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est solution de l'équation sur $\mathbb{R}_*$. Elle est solution sur $\mathbb{R}$ si elle est prolongeable par continuité en une fonction dérivable, voire de classe $\mathcal{C}^1$ auquel cas :
   $$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x)$$
   $$\lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)$$
6. Utilisation des conditions initiales.

Exemple II.4. *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $ty' + |t|y = t^2e^{-|t|}$.*

- *Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$*

$$(\mathcal{E}) \iff ty' + ty = t^2e^{-t} \iff y' + y = te^{-t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right)e^{-t}$ *où* $C_1 \in \mathbb{R}$.

- *Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}_-^*$*

$$(\mathcal{E}) \iff ty' - ty = t^2e^{t} \iff y' - y = te^{t}$$

On trouve $y(t) = \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right)e^{t}$ *où* $C_2 \in \mathbb{R}$.

- *Recollement des solutions*

  Supposons que y soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $(\mathcal{E})$. L'application y est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\exists C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^*, y(t) = \begin{cases} \left(\frac{t^2}{2} + C_1\right) e^{-t} \text{ si } t > 0 \\ \left(\frac{t^2}{2} + C_2\right) e^{t} \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

  Cela donne a priori de très nombreuses solutions! On peut en visualiser certaines sur le graphe ci-contre.

  y est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et le sera sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$y(t) = C_1 - C_1 t + o(t) = C_2 + C_2 t + o(t)$$

  Par unicité du DL, on trouve $C_1 = C_2 = 0$. Il y a donc une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

II.2 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

II.2.1 Généralités

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ continues sur un intervalle I. Les résultats suivants sont provisoirement admis.

Théorème II.5 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \\ y(t_0) = y_0; \quad y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.

Théorème II.6 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est un plan vectoriel;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est un plan affine de direction S_H.*

Le plan de résolution d'une équation linéaire du second ordre ne diffère pas de celui du premier ordre.

Proposition II.7 (Principe de superposition)**.** *Si y_1 est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t)$ et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = d_2(t)$ alors $y_1 + y_2$ est solution de l'équation $ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t)$.*