Corollaire I.13 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$, telle que f' soit bornée. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \cdot \|f'\|_\infty.$$

Les propriétés calculatoires (formule de changement de variable, formule d'intégration par parties) peuvent s'obtenir de même que dans le cas scalaire, à l'aide du théorème fondamental. Ces formules ne sont pas au programme, et seront établies en exercice seulement.
Le théorème fondamental de l'analyse permet aussi de dériver des intégrales vectorielles dépendant de façon C^1 de leur borne, en se ramenant à des dérivées de composées.

I.3 Formules de Taylor

Enfin, nous généralisons les formules de Taylor dans le cadre de fonctions d'une variable à valeurs vectorielles.

Théorème I.14 (Formule de Taylor vectorielle avec reste intégral)**.** *Soit $f \in C^{n+1}([a, b], F)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Se ramener à la formule de Taylor scalaire appliquée aux fonctions coordonnées. On peut aussi procéder directement vectoriellement, en faisant une IPP itérée, à condition de démontrer d'abord la formule d'IPP vectorielle (voir exercices). □

Remarque I.15. *Cette formule ne nécessite pas d'hypothèse $a < b$. Elle reste valide lorsque $b \leq a$.*

On en déduit, comme dans le cas scalaire :

Théorème I.16 (Inégalité de Taylor-Lagrange vectorielle)**.** *Soit $a < b$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, à valeurs dans F. Alors $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$, et*

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En pratique, on cherchera explicitement à majorer $\|f^{(n+1)}\|$ par M, pour obtenir :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin, la formule de Taylor-Young passe aussi au cas vectoriel.

Théorème I.17 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to F$ une fonction de classe C^n au voisinage de x_0. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Éléments de preuve. Coordonnée par coordonnée, les dérivées à tout ordre et les o se caractérisant bien ainsi. □

II. Résolution des équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

Cette première partie reprend et complète l'étude des équations différentielles menée en première année

II.1 Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1

Commençons par exprimer les solutions des équations dites résolues, c'est-à-dire celles qui s'écrivent, sur un intervalle I, sous la forme $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$. On suppose les fonctions $a, b : I \to \mathbb{R}$ continues sur I.

Théorème II.1. *Soit A une primitive de a supposée continue sur l'intervalle I.*

- *L'équation homogène $y' = a(t)y$ admet pour solution générale $t \mapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$.*
- *L'équation $y' = a(t)y + b(t)$ admet pour solution générale $t \mapsto y_p(t) + \lambda e^{A(t)}$ où y_p est une solution particulière de l'équation complète.*

Éléments de preuve.

- Résolution de l'équation homogène par la méthode du facteur intégrant
  Soit y une solution sur I de l'équation $y'(t) - a(t)y(t) = 0$. Posons alors $\phi(t) = y(t)e^{-A(t)}$. ϕ est dérivable et $\phi'(t) = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-A(t)} = 0$. ϕ est constante sur l'intervalle I et donc :

  $$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall t \in I, \quad y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

  Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de l'équation.

- Résolution de l'équation complète par la méthode de variation de la constante
  On recherche les solutions sous la forme $y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$. Soit $t_0 \in I$.

  $$\begin{aligned} y'(t) = a(t)y(t) + b(t) &\iff \lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)} \\ &\iff \lambda(t) = \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx + \lambda(t_0) \\ &\iff y(t) = \lambda(t_0)e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx \end{aligned}$$

  La fonction y est bien la somme d'une solution de l'équation homogène et d'une solution particulière (dont on a même donné une forme explicite).

□

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante et l'équation homogène associée :

$$a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E) \quad \text{et} \quad a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$$

On suppose $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues sur l'intervalle I. On déduit du théorème précédent les deux résultats fondamentaux suivants.

Corollaire II.2 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Lorsque $a : I \to \mathbb{K}$ ne s'annule pas sur l'intervalle I,*

- *l'ensemble S_H des solutions de (H) est une droite vectorielle;*
- *l'ensemble S_E des solutions de (E) est une droite affine de direction S_H.*

Point vocabulaire : on dira « Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions (de la forme) $t \to \ldots$ ».

Corollaire II.3 (Problème de Cauchy)**.** *Si a ne s'annule pas sur l'intervalle I, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution sur I.