Éléments de preuve. Par sommes de Riemann. □

Même si l'inégalité est vraie quelle que soit la norme de F choisie, les valeurs de ces intégrales dépendent de la norme.

Remarque I.7. *1. Il faut évidemment utiliser la même norme de F dans les deux membres de l'inégalité!*

2. Attention ici à l'hypothèse $a < b$. Si $b < a$, il faut rajouter un signe pour contrer l'inversion des bornes. Ou rajouter une valeur absolue externe.

Remarque I.8. *Le cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ est déjà connu (programme de MPSI). Cependant, on peut remarquer qu'on le retrouve ici, à partir du cas $f : I \to \mathbb{R}$, en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v.n..*

I.2 Théorème fondamental

Pour terminer ce passage en revue rapide des intégrales vectorielles, on généralise le théorème fondamental du calcul intégral, et ses conséquences pour l'obtention de l'inégalité des accroissements finis, puis ses généralisations usuelles à des ordres de dérivation supérieure que sont les inégalités de Taylor-Lagrange. Comme dans le cas numérique, le calcul d'une intégrale se ramène au calcul de la variation d'une primitive entre les deux bornes.

Définition I.9 (Primitive de g)**.** *Soit $g, G : I \to F$. On dit que G est une primitive de g si G est dérivable sur I et $G' = g$.*

Proposition I.10 (Comparaison de deux primitives)**.** *Soit $g : I \to F$, continue sur l'intervalle I, et G_1 et G_2 deux primitives de g. Alors $G_2 - G_1$ est constante.*

Éléments de preuve. Par linéarité de la dérivation, et caractérisation des fonctions constantes. □

Théorème I.11 (Théorème fondamental de l'analyse, version vectorielle)**.** *1. Soit $g : I \to F$ une application continue sur $I = [a, b]$, et $a \in I$. Alors :*

$$G_0 : x \mapsto \int_a^x g(u)\, du$$

est une primitive de g. De plus, G_0 est alors de classe C^1.

2. Soit $g : I \to F$ et G une primitive de g. Alors

$$\int_a^b g(x)\, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Éléments de preuve. 1. Se ramener au cas scalaire par choix d'une base.

2. G_0 diffère de G d'une constante, donc $G(b) - G(a) = G_0(b) - G_0(a)$.

□

Voici une réexpression classique du théorème fondamental.

Corollaire I.12 (Intégrale d'une dérivée)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$

Corollaire I.13 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$, telle que f' soit bornée. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq |b - a| \cdot \|f'\|_\infty.$$

Les propriétés calculatoires (formule de changement de variable, formule d'intégration par parties) peuvent s'obtenir de même que dans le cas scalaire, à l'aide du théorème fondamental. Ces formules ne sont pas au programme, et seront établies en exercice seulement.
Le théorème fondamental de l'analyse permet aussi de dériver des intégrales vectorielles dépendant de façon C^1 de leur borne, en se ramenant à des dérivées de composées.

I.3 Formules de Taylor

Enfin, nous généralisons les formules de Taylor dans le cadre de fonctions d'une variable à valeurs vectorielles.

Théorème I.14 (Formule de Taylor vectorielle avec reste intégral)**.** *Soit $f \in C^{n+1}([a, b], F)$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. Se ramener à la formule de Taylor scalaire appliquée aux fonctions coordonnées. On peut aussi procéder directement vectoriellement, en faisant une IPP itérée, à condition de démontrer d'abord la formule d'IPP vectorielle (voir exercices). □

Remarque I.15. *Cette formule ne nécessite pas d'hypothèse $a < b$. Elle reste valide lorsque $b \leq a$.*

On en déduit, comme dans le cas scalaire :

Théorème I.16 (Inégalité de Taylor-Lagrange vectorielle)**.** *Soit $a < b$, et f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, à valeurs dans F. Alors $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a, b]$, et*

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq \|f^{(n+1)}\|_\infty \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

En pratique, on cherchera explicitement à majorer $\|f^{(n+1)}\|$ par M, pour obtenir :

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \right\| \leq M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Enfin, la formule de Taylor-Young passe aussi au cas vectoriel.

Théorème I.17 (Formule de Taylor-Young à l'ordre n au point x_0)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $f : I \to F$ une fonction de classe C^n au voisinage de x_0. Alors :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

Éléments de preuve. Coordonnée par coordonnée, les dérivées à tout ordre et les o se caractérisant bien ainsi. □

II. Résolution des équations linéaires scalaires d'ordres 1 et 2

Cette première partie reprend et complète l'étude des équations différentielles menée en première année