Ce chapitre consiste en un certain nombre de rappels concernant la résolution des équations différentielles linéaires, ainsi qu'un certain nombre de compléments. En effet, le contexte des e.v.n., et les techniques matricielles (notamment la diagonalisation et l'utilisation de l'exponentielle complexe) nous permettent d'avoir des outils efficaces pour gérer des situations bien plus générales que ce que vous avez vu en MPSI.
Les fonctions que nous considérons sont des fonctions $y : I \to E$, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un e.v.n. E de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$, égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation différentielle est une équation reliant les valeurs de f et de ses dérivées successives, évaluées au même point $t \in I$. Nous nous limitons dans ce chapitre à une forme bien particulière d'équations différentielles : les équations différentielles linéaires. Les autres types d'équations différentielles sont bien plus complexes à étudier, et il n'est pas toujours possible d'expliciter les solutions.
Les équations différentielles apparaissent de façon naturelle dans de nombreux contextes, en particulier en physique. Le cas linéaire est souvent suffisant, les physiciens étant des habitués de la linéarisation, donnant souvent (mais pas toujours) des approximations suffisamment précises pour être pertinentes pour la situation étudiée.

I. Compléments d'intégration

On présente dans cette section quelques rappels et compléments sur les intégrales de fonctions d'une variable réelle, à valeurs dans un $\mathbb{K}$-e.v.n. F de dimension finie n (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Les fonctions seront définies sur un segment $I = [a, b]$.

I.1 Définition et propriétés générales

Dans cette sous-partie, f désigne une application d'un segment I dans F. Comme dans le cas d'une application à valeurs réelles, on dit que f est continue par morceaux si I se subdivise en un nombre fini de segments sur l'intérieur desquels f est continue, et au bord desquels elle a une limite dans F.
Pour toute base B de F, on note $(f_{B,1}, \dots, f_{B,n})$ les coordonnées de f dans B, c'est-à-dire les fonctions $f_{B,i} : I \to \mathbb{K}$ telles que pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_{B,i}(t) b_i.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base, on notera simplement f_i au lieu de $f_{B,i}$.

Proposition I.1 (Caractérisation de la continuité par morceaux via les coordonnées)**.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est continue par morceaux sur* I *;*

(ii) pour toute base B *de* F *et tout* $i \in [1, n]$*,* $f_{B,i}$ *est continue par morceaux ;*

(iii) il existe une base B *de* F *telle que pour tout* $i \in [1, n]$*,* $f_{B,i}$ *soit continue par morceaux.*

Éléments de preuve. Découle de la caractérisation coordonnée par coordonnée de la continuité et des limites. □

Proposition I.2 (Définition de l'intégrale vectorielle)**.** *Soit* $f : I = [a, b] \to F$ *une fonction continue par morceaux. Le vecteur*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_{B,i}(t)\, dt \right) b_i$$

est bien défini, et indépendant du choix de la base $B = (b_1, \dots, b_n)$ *de* F*. On définit alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_{B,i}(t)\,dt \right) b_i,$$

la valeur commune de ces expressions. On trouve aussi les notations

$$\int_a^b f, \quad \int_{[a,b]} f(t)\,dt \quad \textit{ou} \quad \int_{[a,b]} f.$$

Éléments de preuve. Exprimer le changement de base matriciellement, et utiliser la linéarité de l'intégrale scalaire. □

En travaillant coordonnées par coordonnées, on transfère de façon quasi-immédiate une grande partie des propriétés usuelles de l'intégrale scalaire.

Proposition I.3 (Linéarités). *Soit $f, g : I \to F$ continues par morceaux sur $I = [a, b]$.*

1. *Linéarité : $\int_a^b (f + \lambda g) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$;*
2. *si $\alpha : I \to \mathbb{R}$ est c.p.m. et $u \in F$, alors $\int_a^b \alpha(t) u\,dt = \left(\int_a^b \alpha(t)\,dt \right) u$;*
3. *Pour tout $L \in \mathcal{L}(F, G)$, $\int_a^b L \circ f = L\left(\int_a^b f \right)$.*

Éléments de preuve. Le point 1 se ramène à la propriété similaire pour les fonctions scalaires, par caractérisation par les coordonnées.
Le point 2 s'obtient en choisissant une base contenant u.
Le point 3 est conséquence des 2 premiers, en travaillant encore dans une base B. On utilise d'abord la linéarité de L pour entrer L dans la somme, puis la linéarité de l'intégrale pour sortir L de l'intégrale, et encore la linéarité de L pour entrer l'intégrale dans L ! □

Proposition I.4 (Relation de Chasles). *Soit $f : I \to F$, c.p.m. sur $I = [a, b]$ et $c \in [a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Éléments de preuve. Encore les coordonnées. □

Le point suivant se généraliserait sur des subdivisions non régulières dont le pas tend vers 0, mais seul le cas des subdivisions régulières est au programme.

Théorème I.5 (Sommes de Riemann). *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans F. Alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \to \int_a^b f(t)\,dt.$$

Éléments de preuve. On peut voir F comme un $\mathbb{R}$-ev (même si au départ il est complexe). Se ramener au cas de fonctions à valeurs réelles en travaillant dans une $\mathbb{R}$-base. □

Théorème I.6 (Inégalité triangulaire). *On suppose que F est un $\mathbb{K}$-e.v.n. Soit $f : I = [a, b] \to F$ une application c.p.m., avec $a < b$. Alors $\|f\|_F$ est c.p.m. et*

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx \right\|_F \leq \int_a^b \|f(x)\|_F\,dx.$$

Éléments de preuve. Par sommes de Riemann. □

Même si l'inégalité est vraie quelle que soit la norme de F choisie, les valeurs de ces intégrales dépendent de la norme.

Remarque I.7. *1. Il faut évidemment utiliser la même norme de F dans les deux membres de l'inégalité!*

2. Attention ici à l'hypothèse $a < b$. Si $b < a$, il faut rajouter un signe pour contrer l'inversion des bornes. Ou rajouter une valeur absolue externe.

Remarque I.8. *Le cas des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ est déjà connu (programme de MPSI). Cependant, on peut remarquer qu'on le retrouve ici, à partir du cas $f : I \to \mathbb{R}$, en voyant $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-e.v.n..*

I.2 Théorème fondamental

Pour terminer ce passage en revue rapide des intégrales vectorielles, on généralise le théorème fondamental du calcul intégral, et ses conséquences pour l'obtention de l'inégalité des accroissements finis, puis ses généralisations usuelles à des ordres de dérivation supérieure que sont les inégalités de Taylor-Lagrange. Comme dans le cas numérique, le calcul d'une intégrale se ramène au calcul de la variation d'une primitive entre les deux bornes.

Définition I.9 (Primitive de g)**.** *Soit $g, G : I \to F$. On dit que G est une primitive de g si G est dérivable sur I et $G' = g$.*

Proposition I.10 (Comparaison de deux primitives)**.** *Soit $g : I \to F$, continue sur l'intervalle I, et G_1 et G_2 deux primitives de g. Alors $G_2 - G_1$ est constante.*

Éléments de preuve. Par linéarité de la dérivation, et caractérisation des fonctions constantes. □

Théorème I.11 (Théorème fondamental de l'analyse, version vectorielle)**.** *1. Soit $g : I \to F$ une application continue sur $I = [a, b]$, et $a \in I$. Alors :*

$$G_0 : x \mapsto \int_a^x g(u)\, du$$

est une primitive de g. De plus, G_0 est alors de classe C^1.

2. Soit $g : I \to F$ et G une primitive de g. Alors

$$\int_a^b g(x)\, dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Éléments de preuve. 1. Se ramener au cas scalaire par choix d'une base.

2. G_0 diffère de G d'une constante, donc $G(b) - G(a) = G_0(b) - G_0(a)$.

□

Voici une réexpression classique du théorème fondamental.

Corollaire I.12 (Intégrale d'une dérivée)**.** *Soit $f \in C^1(I, F)$. Alors, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt.$$