IV.4 Étude à l'ordre 2

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et si $a \in I$ est un point critique de f, on peut déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum par un argument de convexité locale, ce qui, en cas de régularité suffisante, se ramène à l'étude du signe de $f''(a)$. Nous recherchons une condition similaire lorsque f est une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, à l'aide de la matrice hessienne $H_f(a)$.

Proposition IV.15 (CN du second ordre)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2. Si f admet un minimum local (resp. maximum local) en $a \in \Omega$, alors a est un point critique de f et $H_f(a) \in S_+(\mathbb{R})$ (resp. $-H_f(a) \in S_+(\mathbb{R})$).*

Éléments de preuve. D'après la formule de Taylor-Young, le signe de $f(a+h) - f(a)$ est celui de $h^T H_f(a) h$. □

Théorème IV.16 (CS du second ordre)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ (où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$) de classe C^2, et soit $a \in \Omega$. Si a est un point critique de f et si $H_f(a) \in S_{++}(\mathbb{R})$ (resp. $-H_f(a) \in S_{++}(\mathbb{R})$), alors f admet un minimum local strict (resp. maximum local strict) en a.*

Éléments de preuve. Toujours le contrôle du signe par Taylor-Young, en travaillant avec une norme adaptée à $H_f(a)$. □

Remarque IV.17 (Avertissement)**.** *La CN du second ordre n'est pas une CS.*

- *La CS du second ordre n'est pas une CN.*

Exemple IV.18. *Étudier les CN et CS du second ordre pour les fonctions suivantes, en 0.*

1. $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^2$.
2. $g : (x, y) \mapsto x^3 y^3$.

Méthode IV.19 (Étude d'un point critique)**.** *Pour savoir si un point critique correspond à un extremum local, on étudiera le signe de la hessienne,*

- *soit directement par mises sous forme canonique successives de la forme quadratique $h \mapsto h^T H_f(a) h$,*
- *soit par étude des valeurs propres de $H_f(a)$.*

On peut alors conclure :

- *Si $H_f(a)$ n'est pas positive (i.e. s'il existe une valeur propre strictement négative, ou s'il existe h tel que $h^T H_f(a) h < 0$), alors f n'admet pas d'extremum local en a.*
- *Si $H_f(a)$ est strictement positive (si $\mathrm{Spec}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$), alors f admet un minimum local.*

On ne peut pas conclure de cette façon si ces conditions ou les conditions symétriques (pour un maximum) ne sont pas satisfaites, à savoir dans le cas où $0 \in \mathrm{Spec}(H_f(a))$.

Corollaire IV.20 (Explicitation pour $n = 2$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2, et a un point critique de f. Alors :*

- *Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$, alors f admet un minimum local strict en a.*
- *Si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{tr}(H_f(a)) < 0$, alors f admet un maximum local strict en a.*
- *si $\det(H_f(a)) < 0$, alors f n'admet pas d'extremum local en a.*

Exemple IV.21. *Étudier la nature du point critique* $(0,0)$ *dans les 3 cas suivants :*

1. $f_1(x,y) = y^4 + x^2y + x^2 + 2xy + 2y^2$
2. $f_2(x,y) = x^3y + x^2 - 4xy + y^2$
3. $f_3(x,y) = xy^2 + x^3 - x^2 + 2xy - 2y^2$.

Solution Étudions la nature du point critique $(0,0)$ pour les trois fonctions proposées.
1. Étude de $f_1(x,y) = y^4 + x^2y + x^2 + 2xy + 2y^2$
Conditions nécessaires du premier ordre :

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2xy + 2x + 2y, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 4y^3 + x^2 + 2x + 4y.$$

En $(0,0)$: $\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) = 0$. $(0,0)$ est bien un point critique.
Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = 2y + 2, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = 2x + 2, \quad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = 12y^2 + 4.$$

En $(0,0)$:

$$H_{f_1}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\det(H) = 2 \times 4 - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4 > 0$, $\mathrm{tr}(H) = 2 + 4 = 6 > 0$.
D'après le corollaire, f_1 admet un **minimum local strict** en $(0,0)$. La condition suffisante du second ordre est vérifiée.

2. Étude de $f_2(x,y) = x^3y + x^2 - 4xy + y^2$
Conditions nécessaires du premier ordre :

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3x^2y + 2x - 4y, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x^3 - 4x + 2y.$$

En $(0,0)$: $\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) = 0$. $(0,0)$ est un point critique.
Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = 6xy + 2, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2} = 2.$$

En $(0,0)$:

$$H_{f_2}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\det(H) = 2 \times 2 - (-4) \times (-4) = 4 - 16 = -12 < 0$.
D'après le corollaire, f_2 **n'admet pas d'extremum local** en $(0,0)$: c'est un point selle (ou col). La condition nécessaire du second ordre (hessienne positive ou négative) n'est pas satisfaite.

3. Étude de $f_3(x,y) = xy^2 + x^3 - x^2 + 2xy - 2y^2$
Conditions nécessaires du premier ordre :

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y^2 + 3x^2 - 2x + 2y, \qquad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 2xy + 2x - 4y.$$

En $(0,0)$: $\frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0) = 0$. $(0,0)$ est un point critique.
Conditions du second ordre :

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y} = 2y + 2, \quad \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} = 2x - 4.$$

En $(0,0)$:

$$H_{f_3}(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$\det(H) = (-2) \times (-4) - 2 \times 2 = 8 - 4 = 4 > 0$, $\mathrm{tr}(H) = -2 - 4 = -6 < 0$.
D'après le corollaire, f_3 admet un **maximum local strict** en $(0,0)$. La condition suffisante du second ordre pour un maximum est vérifiée.

- f_1 : minimum local strict en $(0,0)$.
- f_2 : point selle en $(0,0)$ (pas d'extremum).
- f_3 : maximum local strict en $(0,0)$.