car l'exponentielle négative domine la croissance polynomiale.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $R > 0$ tel que

$$\|(x,y)\| > R \implies |f(x,y)| < 1.$$

Sur la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ (compacte), f atteint son minimum m et son maximum M par continuité.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc :

$$f(x,y) \geq \min(m,-1) \quad \text{et} \quad f(x,y) \leq \max(M,1)$$

ce qui prouve que f est bornée sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque $f(0,0) = -1 < 0$ et $f(0,3) = 8e^{-9} > 0$, la fonction prend des valeurs négatives et positives.
Comme elle tend vers 0 à l'infini, ses bornes (inférieure et supérieure) sont nécessairement atteintes sur le compact $\overline{B}(0,R)$ (car en dehors, $|f| < 1$ alors que le minimum est ≤ -1 et le maximum $\geq 8e^{-9} < 1$).
Ainsi, f admet un minimum et un maximum globaux sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étude de $g(x,y) = \dfrac{e^{-x^2-y^2}}{1-x^2-y^2}$
g est continue sur $B(0,1)$ et $\lim\limits_{x^2+y^2 \to 1^-} g(x,y) = +\infty$.
Soit $m = \inf_{B(0,1)} g$. Il existe $r \in]0,1[$ tel que :

$$x^2+y^2 > r \implies g(x,y) > m+1.$$

Posons $K = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r\}$ (compact). Sur K, g atteint son minimum m_K.
Alors $\inf_{B\setminus K} g \geq m+1 > m \geq m_K$. Donc $m = \min(m_K, \inf_{B\setminus K} g) = m_K$.
Ainsi g admet un minimum global m_K, atteint dans K.

IV.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème IV.5 (CN du premier ordre pour un extremum local)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{D}$ et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$.*

Remarque IV.6 (Avertissement)**.** *Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, $df(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour avoir un extremum local.*

Exemple IV.7 (Figure 16.8)**.** *Quels sont les points critiques de $f : (x,y) \mapsto xy$? La fonction f admet-elle un extremum local ? Cet exemple montre au passage que le fait que les restrictions de f à toutes les droites passant par a admettent un extremum local en a n'est pas suffisant pour que f admette un extremum local en a.*

Méthode IV.8 (Rechercher les extrema locaux sur un ouvert)**.** *On cherche les points critiques de f, puis on étudie chaque point critique a :*

- *soit par étude directe du signe de $f(x) - f(a)$,*
- *soit en utilisant la CN d'ordre 2 qui fait l'objet d'un paragraphe ultérieur.*

Méthode IV.9 (Rechercher les extrema globaux)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, différentiable sur D.*

- *Rechercher les points critiques sur $\mathring{D}$. Les extrema globaux, s'ils existent, sont un point critique, ou un point de $D \setminus \mathring{D}$.*
- *Si on a pu justifier l'existence d'un extremum global, on peut le trouver en comparant les valeurs prises aux différents points critiques, ainsi que le maximum et/ou le minimum de f restreinte à $D \setminus \mathring{D}$.*

Le paragraphe suivant donne justement des techniques en vue de l'étude des extrema d'une fonction restreinte. Cela permet notamment l'étude aux bords (si D lui-même peut être plongé dans un ouvert Ω de sorte que $D \setminus \mathring{D}$ soit une partie de Ω).

IV.3 Optimisation sous contrainte

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, et $X \subset D$. Optimiser f sous la contrainte X consiste à étudier les extrema de f en se restreignant à X (la contrainte). Il s'agit donc d'étudier les extrema d'une restriction. Nous commençons par une CN similaire à celle qu'on a trouvé dans le cas global (qui d'ailleurs peut être vu comme conséquence de celle-ci).

Proposition IV.10 (CN du premier ordre pour une restriction)**.** *Soit Ω un ouvert de E, X une partie de Ω, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$, alors*

$$\forall h \in T_a X, \quad df(a) \cdot h = 0.$$

En d'autres termes, $df(a)$ s'annule en tout vecteur tangent à X, c'est-à-dire $T_a X \subset \operatorname{Ker} df(a)$.

Éléments de preuve. Dériver $f(\alpha(t))$, où $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \to X$ vérifie $\alpha(0) = a$. □

Remarque IV.11. *En prenant $X = \mathring{D}$, puisque X est un voisinage de a, $T_a X = E$, et on retrouve donc le théorème 16.4.5.*

2. *Si E est euclidien, la proposition 16.4.15 affirme que si $f|_X$ admet un extremum local en a, $\nabla f(a) \perp T_a X$.*

Si l'ensemble X est défini par une équation $g(x) = 0$, on peut combiner le résultat précédent et le théorème 16.3.21.

Théorème IV.12 (Optimisation sous contrainte)**.** *Soit $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1, et $X = \{x \in \Omega, g(x) = 0\}$. Si $f|_X$ admet un extremum local en $a \in X$ tel que $dg(a) \neq 0$, alors $df(a)$ et $dg(a)$ sont colinéaires.*

Exercices d'optimisation sous contrainte

Exemple IV.13. *Déterminer les extrema de $f(x, y) = x^2 + xy - 2y^2$ sur le cercle unité $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.*

Solution
Existence. Le cercle unité est compact et f est continue, donc f admet un minimum et un maximum sur ce cercle.
Multiplicateurs de Lagrange. On résout :

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Les gradients :

$$\nabla f = (2x + y,\ x - 4y), \quad \nabla g = (2x,\ 2y)$$

D'où le système linéaire en x, y :

$$\begin{cases} 2x + y = 2\lambda x \\ x - 4y = 2\lambda y \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} (2 - 2\lambda)x + y = 0 \\ x + (-4 - 2\lambda)y = 0 \end{cases}$$

Recherche de λ. Pour que ce système homogène admette une solution non nulle $(x, y) \neq (0, 0)$, il faut que son déterminant soit nul :

$$\det \begin{pmatrix} 2 - 2\lambda & 1 \\ 1 & -4 - 2\lambda \end{pmatrix} = 0$$