IV. Optimisation

IV.1 Principes généraux

L'optimisation consiste en l'étude des extrema d'une fonction f (globaux ou locaux).

Définition IV.1 (Extrema). *Soit D un sous-ensemble de E, et $f : D \to \mathbb{R}$, et $a \in D$. On dit que :*

- *f admet un minimum global (resp. maximum global) en a si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$);*
- *f admet un minimum global strict (resp. maximum global strict) en a si pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$);*
- *f admet un minimum local (resp. maximum local) en a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$);*
- *f admet un minimum local strict (resp. maximum local strict) en a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in D \cap V \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).*

Le but de cette section est de donner des principes de recherche des extrema (locaux ou globaux). Les sous-sections suivantes donneront des méthodes pour trouver en quels points de D il existe un extremum, local ou global. Pour commencer, nous nous intéressons à l'existence d'un extremum global (ou local par restriction à un voisinage).
Nous rappelons le théorème de compacité, outil incontournable dans ce contexte.

Théorème IV.2 (Compacté). *Si D est compact et $f : D \to \mathbb{R}$ est continue, alors f admet un minimum et un maximum globaux.*

Il est fréquent d'étudier des fonctions qui ne sont pas définies sur des compacts. Mais il est possible de s'y ramener, soit en restreignant (si D n'est pas borné), soit en prolongeant (si D est borné).

Méthode IV.3 (Prouver l'existence d'un extremum global). *On peut bien entendu utiliser les méthodes de localisation des extrema des paragraphes suivants et comparer les valeurs à toutes les autres, mais il peut être intéressant de savoir justifier a priori l'existence d'un extremum global de $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Si D est compact et f continue, le théorème de compacité donne l'existence d'un maximum et d'un minimum.*
2. *Si on parvient à trouver un compact $K \subset D$, et $a \in D$ tel que*

$$\forall x \in D \setminus K, \quad f(x) \geq f(a),$$

alors f admet un minimum sur D, atteint dans K.

3. *Si D est borné, $\overline{D}$ est borné. Si f admet une limite en tout point de $\overline{D} \setminus D$, et s'il existe $a \in D$ tel que*

$$\forall b \in \overline{D} \setminus D, \quad \lim_{x \to b} f(x) \geq f(a),$$

alors f admet un minimum sur D.

Exemple IV.4. 1. *Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2y - 3y + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *Montrer que $g : (x, y) \mapsto \frac{e^{-e^{xy}}}{1-(x^2+y^2)}$ admet un minimum sur $B(0, 1)$.*

Solution:
1. Étude de $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}$
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comportement à l'infini :

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = 0$$

car l'exponentielle négative domine la croissance polynomiale.
Pour $\varepsilon = 1$, il existe $R > 0$ tel que

$$\|(x,y)\| > R \implies |f(x,y)| < 1.$$

Sur la boule fermée $\overline{B}(0,R)$ (compacte), f atteint son minimum m et son maximum M par continuité.
Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc :

$$f(x,y) \geq \min(m,-1) \quad \text{et} \quad f(x,y) \leq \max(M,1)$$

ce qui prouve que f est bornée sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque $f(0,0) = -1 < 0$ et $f(0,3) = 8e^{-9} > 0$, la fonction prend des valeurs négatives et positives.
Comme elle tend vers 0 à l'infini, ses bornes (inférieure et supérieure) sont nécessairement atteintes sur le compact $\overline{B}(0,R)$ (car en dehors, $|f| < 1$ alors que le minimum est ≤ -1 et le maximum $\geq 8e^{-9} < 1$).
Ainsi, f admet un minimum et un maximum globaux sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étude de $g(x,y) = \dfrac{e^{-x^2-y^2}}{1-x^2-y^2}$
g est continue sur $B(0,1)$ et $\lim\limits_{x^2+y^2 \to 1^-} g(x,y) = +\infty$.
Soit $m = \inf_{B(0,1)} g$. Il existe $r \in]0,1[$ tel que :

$$x^2+y^2 > r \implies g(x,y) > m+1.$$

Posons $K = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r\}$ (compact). Sur K, g atteint son minimum m_K.
Alors $\inf_{B\setminus K} g \geq m+1 > m \geq m_K$. Donc $m = \min(m_K, \inf_{B\setminus K} g) = m_K$.
Ainsi g admet un minimum global m_K, atteint dans K.

IV.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème IV.5 (CN du premier ordre pour un extremum local)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in \mathring{D}$ et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$.*

Remarque IV.6 (Avertissement)**.** *Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, $df(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour avoir un extremum local.*

Exemple IV.7 (Figure 16.8)**.** *Quels sont les points critiques de $f : (x,y) \mapsto xy$? La fonction f admet-elle un extremum local ? Cet exemple montre au passage que le fait que les restrictions de f à toutes les droites passant par a admettent un extremum local en a n'est pas suffisant pour que f admette un extremum local en a.*

Méthode IV.8 (Rechercher les extrema locaux sur un ouvert)**.** *On cherche les points critiques de f, puis on étudie chaque point critique a :*

- *soit par étude directe du signe de $f(x) - f(a)$,*
- *soit en utilisant la CN d'ordre 2 qui fait l'objet d'un paragraphe ultérieur.*

Méthode IV.9 (Rechercher les extrema globaux)**.** *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, différentiable sur D.*

- *Rechercher les points critiques sur $\mathring{D}$. Les extrema globaux, s'ils existent, sont un point critique, ou un point de $D \setminus \mathring{D}$.*
- *Si on a pu justifier l'existence d'un extremum global, on peut le trouver en comparant les valeurs prises aux différents points critiques, ainsi que le maximum et/ou le minimum de f restreinte à $D \setminus \mathring{D}$.*

Le paragraphe suivant donne justement des techniques en vue de l'étude des extrema d'une fonction restreinte. Cela permet notamment l'étude aux bords (si D lui-même peut être plongé dans un ouvert Ω de sorte que $D \setminus \mathring{D}$ soit une partie de Ω).