Théorème III.37 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 au voisinage de $a \in \Omega$. Alors f admet un DL à l'ordre 2 en a, s'exprimant :*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Éléments de preuve. Démonstration non exigible. On peut procéder comme dans le cas de 2 variables, en utilisant la formule de Taylor-Young pour les fonctions d'une variable, successivement sur chaque variable. On peut aussi exploiter la symétrie de $H_f(a)$ en considérant d'abord une b.o.n. de diagonalisation $(b_1, \dots, b_n)$, et en exploitant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions partielles associées. Les exprimer par ε, et exprimer le cas général par linéarité et bilinéarité. □

III.5 Équations aux dérivées partielles (EDP)

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation d'inconnue une fonction f de plusieurs variables, reliant ses différentes dérivées partielles. L'ordre de l'EDP est l'ordre de dérivation le plus important intervenant dans cette équation. Par exemple, l'équation suivante, pour une fonction inconnue f de 2 variables, l'équation

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

est une EDP d'ordre 3. La résolution d'équations aux dérivées partielles est un problème en général dur. Nous nous contentons ici de donner quelques pistes, sur des exemples simples.
Le principe va souvent être de se ramener à des équations simples. Pour cela, nous commençons par une forme simple d'équation de degré 1.

Proposition III.38 (Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$)**.** *Soit $i \in [1, n]$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sur Ω;*
2. *il existe $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

En d'autres termes, les solutions de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sont les fonctions ne dépendant pas de la variable x_i et de classe C^1 par rapport aux autres variables.

Exemple III.39. *Résoudre $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.*
Solution:
Analyse: *Supposons qu'une solution f existe. On cherche un changement de variables linéaire qui transforme l'opérateur différentiel en une dérivée partielle simple. Posons :*

$$u = bx - ay, \quad v = ax + by, \quad F(u, v) = f(x, y)$$

Ce choix est motivé par le fait que $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$ (u est constant le long des courbes caractéristiques) et que (u, v) forme une base de $\mathbb{R}^2$ car le déterminant est $b^2 + a^2 \neq 0$.
Calculons les dérivées de f en fonction de F :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b\frac{\partial F}{\partial u} + a\frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}$$

Substituons dans l'équation :

$$a\left(b\frac{\partial F}{\partial u} + a\frac{\partial F}{\partial v}\right) + b\left(-a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) = (a^2 + b^2)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

Comme $a^2+b^2\neq 0$, on obtient $\frac{\partial F}{\partial v}=0$.
Synthèse: *De $\frac{\partial F}{\partial v}=0$ on déduit que F ne dépend pas de v :*

$$\frac{\partial F}{\partial v}=0 \quad \textit{donc} \quad F(u,v)=H(u)$$

où H est une fonction arbitraire C^1.
En revenant aux variables initiales, on obtient la solution générale :

$$\boxed{f(x,y)=H(bx-ay)} \quad \textit{avec } H\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \textit{ arbitraire.}$$

Exemple III.40. *Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.*
Solution:
Posons $g=\frac{\partial f}{\partial y}$. Alors $\frac{\partial g}{\partial x}=0$ donc $g(x,y)=\phi(y)$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}=\phi(y)$ donc $f(x,y)=\int\phi(y)\,dy+\psi(x)=\Phi(y)+\psi(x)$.
Ainsi $\boxed{f(x,y)=\Phi(y)+\psi(x)}$ avec $\Phi,\psi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ arbitraires.

2. *Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $a>0$, $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.*
Solution:
Analyse:
Cherchons un changement de variables linéaire qui simplifie l'équation. L'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est un opérateur d'onde. On cherche des variables p,q telles que l'équation devienne $\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0$.
Considérons le changement :

$$p=x+ay,\quad q=x-ay,\quad F(p,q)=f(x,y)$$

Ce choix correspond aux courbes caractéristiques de l'équation des ondes.
Calculons les dérivées premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=a\frac{\partial F}{\partial p}-a\frac{\partial F}{\partial q}$$

Calculons les dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}+\frac{\partial F}{\partial q}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{\partial F}{\partial p}-a\frac{\partial F}{\partial q}\right)=a^2\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}-2a^2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+a^2\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$$

Substituons dans l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\right)-a^2\left(a^2\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}-2a^2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}+a^2\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\right)=0$$

En simplifiant (ou en vérifiant directement pour $a=1$), on constate que cette expression se réduit à :

$$4a^2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0 \quad \textit{donc} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0$$

Synthèse:
De $\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0$ on déduit, comme à la question 1, que F est somme d'une fonction de p et d'une fonction de q :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}=0 \quad \textit{donc} \quad F(p,q)=\Phi(p)+\Psi(q)$$

où Φ et Ψ sont des fonctions C^2 arbitraires.
En revenant aux variables initiales, on obtient la solution générale de l'équation des ondes :

$$\boxed{f(x,y)=\varphi(x+ay)+\psi(x-ay)} \quad \textit{avec } \varphi,\psi\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \textit{ arbitraires.}$$

IV. Optimisation

IV.1 Principes généraux

L'optimisation consiste en l'étude des extrema d'une fonction f (globaux ou locaux).

Définition IV.1 (Extrema). *Soit D un sous-ensemble de E, et $f : D \to \mathbb{R}$, et $a \in D$. On dit que :*

- *f admet un minimum global (resp. maximum global) en a si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$);*
- *f admet un minimum global strict (resp. maximum global strict) en a si pour tout $x \in D \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$);*
- *f admet un minimum local (resp. maximum local) en a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in D \cap V$, $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$);*
- *f admet un minimum local strict (resp. maximum local strict) en a s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que pour tout $x \in D \cap V \setminus \{a\}$, $f(x) > f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).*

Le but de cette section est de donner des principes de recherche des extrema (locaux ou globaux). Les sous-sections suivantes donneront des méthodes pour trouver en quels points de D il existe un extremum, local ou global. Pour commencer, nous nous intéressons à l'existence d'un extremum global (ou local par restriction à un voisinage).
Nous rappelons le théorème de compacité, outil incontournable dans ce contexte.

Théorème IV.2 (Compacté). *Si D est compact et $f : D \to \mathbb{R}$ est continue, alors f admet un minimum et un maximum globaux.*

Il est fréquent d'étudier des fonctions qui ne sont pas définies sur des compacts. Mais il est possible de s'y ramener, soit en restreignant (si D n'est pas borné), soit en prolongeant (si D est borné).

Méthode IV.3 (Prouver l'existence d'un extremum global). *On peut bien entendu utiliser les méthodes de localisation des extrema des paragraphes suivants et comparer les valeurs à toutes les autres, mais il peut être intéressant de savoir justifier a priori l'existence d'un extremum global de $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Si D est compact et f continue, le théorème de compacité donne l'existence d'un maximum et d'un minimum.*
2. *Si on parvient à trouver un compact $K \subset D$, et $a \in D$ tel que*

$$\forall x \in D \setminus K, \quad f(x) \geq f(a),$$

alors f admet un minimum sur D, atteint dans K.

3. *Si D est borné, $\overline{D}$ est borné. Si f admet une limite en tout point de $\overline{D} \setminus D$, et s'il existe $a \in D$ tel que*

$$\forall b \in \overline{D} \setminus D, \quad \lim_{x \to b} f(x) \geq f(a),$$

alors f admet un minimum sur D.

Exemple IV.4. 1. *Montrer que $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2y - 3y + y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$ admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *Montrer que $g : (x, y) \mapsto \frac{e^{-e^{xy}}}{1-(x^2+y^2)}$ admet un minimum sur $B(0, 1)$.*

Solution:
1. Étude de $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}$
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Comportement à l'infini :

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(x, y) = 0$$