Dans le cas de fonctions d'une seule variable réelle, on rajoute une propriété, concernant la dérivée itérée d'une forme bilinéaire. Lorsqu'on applique cette formule au cas du produit de deux réels, on retrouve la formule de Leibniz classique.

Théorème III.33 (Formule de Leibniz vectorielle)**.** *Soit E, F, G des K-evn de dimension finie, et $B : E \times F \to G$ des K-evn. Soit I un intervalle, et $f : I \to E$ et $g : I \to F$ deux applications. Si f et g sont de classe C^k, alors $B(f,g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est aussi de classe C^k, et*

$$\forall t \in I, \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t))\, dt.$$

III.4 Hessienne et formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Définition III.34 (Matrice hessienne de f)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. La matrice hessienne de f en $a \in \Omega$ est*

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.35 (Symétrie de $H_f(a)$)**.** *Sous les mêmes hypothèses, $H_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$.*

Éléments de preuve. C'est une réexpression du théorème de Schwarz. □

Lemme III.36 (Expression de la dérivée seconde par rapport à un vecteur)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in \Omega$ et $U \in \mathbb{R}^n$. Alors, la dérivée seconde selon le vecteur U au point a s'exprime à l'aide de la hessienne :*

$$f''_{a,U}(0) = U^T H_f(a) U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

La matrice hessienne va nous permettre d'exprimer de façon élégante la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire l'expression d'un DL à l'ordre 2 à l'aide des dérivées d'ordre 1 et 2, sous les hypothèses idoines de régularité.
Nous avons déjà obtenu une première version de cette formule, lorsque f est une fonction de 2 variables de classe C^2 au voisinage d'un point a, lors de la démonstration du théorème de Schwarz :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + o(\|H\|^2),$$

où $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. À l'aide du lemme précédent, on obtient une réexpression synthétique de cette formule, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$f(X+H) = f(X) + \langle \nabla f(X), H \rangle + \frac{1}{2} H^\top H_f(x) H + o(\|H\|^2).$$

Plus généralement :

Théorème III.37 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 2)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 au voisinage de $a \in \Omega$. Alors f admet un DL à l'ordre 2 en a, s'exprimant :*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2).$$

Éléments de preuve. Démonstration non exigible. On peut procéder comme dans le cas de 2 variables, en utilisant la formule de Taylor-Young pour les fonctions d'une variable, successivement sur chaque variable. On peut aussi exploiter la symétrie de $H_f(a)$ en considérant d'abord une b.o.n. de diagonalisation $(b_1, \dots, b_n)$, et en exploitant la formule de Taylor à l'ordre 2 pour les fonctions partielles associées. Les exprimer par ε, et exprimer le cas général par linéarité et bilinéarité. □

III.5 Équations aux dérivées partielles (EDP)

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation d'inconnue une fonction f de plusieurs variables, reliant ses différentes dérivées partielles. L'ordre de l'EDP est l'ordre de dérivation le plus important intervenant dans cette équation. Par exemple, l'équation suivante, pour une fonction inconnue f de 2 variables, l'équation

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

est une EDP d'ordre 3. La résolution d'équations aux dérivées partielles est un problème en général dur. Nous nous contentons ici de donner quelques pistes, sur des exemples simples.
Le principe va souvent être de se ramener à des équations simples. Pour cela, nous commençons par une forme simple d'équation de degré 1.

Proposition III.38 (Résolution de $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$)**.** *Soit $i \in [1, n]$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sur Ω;*
2. *il existe $g \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

En d'autres termes, les solutions de l'EDP $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ sont les fonctions ne dépendant pas de la variable x_i et de classe C^1 par rapport aux autres variables.

Exemple III.39. *Résoudre $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.*
Solution:
Analyse: *Supposons qu'une solution f existe. On cherche un changement de variables linéaire qui transforme l'opérateur différentiel en une dérivée partielle simple. Posons :*

$$u = bx - ay, \quad v = ax + by, \quad F(u, v) = f(x, y)$$

Ce choix est motivé par le fait que $a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$ (u est constant le long des courbes caractéristiques) et que (u, v) forme une base de $\mathbb{R}^2$ car le déterminant est $b^2 + a^2 \neq 0$.
Calculons les dérivées de f en fonction de F :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = b\frac{\partial F}{\partial u} + a\frac{\partial F}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}$$

Substituons dans l'équation :

$$a\left(b\frac{\partial F}{\partial u} + a\frac{\partial F}{\partial v}\right) + b\left(-a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) = (a^2 + b^2)\frac{\partial F}{\partial v} = 0$$