III.3 Applications de classe C^k

Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E, $(i,j) \in [1,n]$, et $f : \Omega \to F$ admettant une dérivée partielle $\partial_i f$ sur tout Ω. Si la fonction $\partial_i f : \Omega \to F$ admet elle-même une j-ième dérivée partielle en $a \in \Omega$, on peut donc définir $\partial_j \partial_i f(a)$, la j-ième dérivée partielle de $\partial_i f$. De façon plus générale, on définit par récurrence sur k les dérivées d'ordre k :

Définition III.26 (Dérivées partielles d'ordre k)**.** *On définit, si c'est possible, les dérivées d'ordre k de f par récurrence sur k :*

- *Si $k = 1$, il s'agit des dérivées partielles $\partial_i f$.*
- *Soit $k > 1$ et $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k$. La fonction f admet en $a \in \Omega$ une dérivée par rapport successivement aux $i_1, \dots, i_{k-1}$ et i_k-ème vecteurs de la base B, notée $\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a)$, si et seulement si $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a)$ existe au voisinage (relatif dans Ω) de a et est dérivable selon b_{i_k} en a. Ainsi,*
$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a) = \partial_{i_k} \left(\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f \right)(a).$$

On trouve aussi les notations suivantes :

- *$\partial_{i_1,\dots,i_k} f(a)$ (attention à l'ordre des indices !),*
- *$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$, si $(x_1, \dots, x_n)$ représentent les coordonnées génériques dans la base B, en particulier si $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.*

On peut définir des différentielles d'ordre supérieur, mais cette notion est hors programme, et les objets manipulés deviennent de plus en plus complexes. Pour cette raison, nous définissons la classe C^k à l'aide des dérivées partielles d'ordre k. Cette définition est une généralisation de la caractérisation de la classe C^1 par les dérivées partielles premières.

Définition III.27 (Applications de classe C^k)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ une application définie sur l'ouvert Ω de E.*

1. *On dit que f est de classe C^k sur Ω si toutes les dérivées d'ordre k de f existent (il y en a n^k), et sont continues sur Ω.*
2. *On dit que f est de classe C^k au voisinage de $a \in \Omega$, s'il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $f|_V$ soit de classe C^k sur V.*
3. *On note $C^k(\Omega, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur Ω, à valeurs dans F. Par convention, $C^0(\Omega, F)$ est l'ensemble des fonctions continues.*
4. *On dit que f est de classe C^∞ sur Ω si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
5. *On note $C^\infty(\Omega, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω, à valeurs dans F.*

Remarque III.28. *Si f est de classe C^k, alors :*

- *f est de classe C^j pour tout $j \leq k$;*
- *plus généralement, si $\ell \leq k$ et $(i_1, \dots, i_\ell) \in [\![0,n]\!]^\ell$, $\partial_{i_1,\dots,i_\ell} f$ est de classe $C^{k-\ell}$.*

Pour étudier la classe C^k, il y a donc a priori n^k dérivées à étudier. Mais en pratique, cela en fait moins, car sous des conditions assez peu restrictives, on va retrouver plusieurs fois la même, dans le sens où l'ordre de dérivation (i.e. le choix de l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive) n'importe pas. C'est ce que dit le théorème suivant.

Théorème III.29 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit $f : \Omega \to F$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E, et $a \in \Omega$. Si f est de classe C^2 au voisinage de a, alors*
$$\forall (i,j) \in [1,n], \quad \partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$

Éléments de preuve. Démonstration non exigible.
En fixant toutes les autres variables, on est ramené au cas de fonctions de 2 variables. Exprimer un DL2 de $f(x+h,y+k)-f(x,y)$ en $H=(h,k)$, de deux manières différentes, en intercalant $f(x+h,y)$, ou $f(x,y+k)$, et en se ramenant à la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour les fonctions d'une variable (en fixant l'autre). Identifier les deux DL obtenus (justifier proprement cette identification). □

Corollaire III.30 (Théorème de Schwarz pour la classe C^k). *Soit $f:\Omega\to F$, $B=(b_1,\dots,b_n)$ une base de E, et $a\in\Omega$. Si f est de classe C^2 au voisinage de a, alors pour tout $(i_1,\dots,i_k)\in[1,n]^k$, et toute permutation $\sigma\in S_k$,*

$$\partial_{i_1,\dots,i_k}f(a)=\partial_{i_{\sigma(1)},\dots,i_{\sigma(k)}}f(a).$$

Éléments de preuve. Les dérivées partielles successives commutent 2 à 2. On peut donc ramener d'abord i_1 en position initiale, par échange successif, pour faire ensuite une récurrence. Ou directement utiliser le fait que S_n est engendré par les transpositions $(i\ i+1)$. □

Ainsi, l'ordre des variables de dérivation importe peu, dès lors que la fonction est de classe C^k, ce qui permet de regrouper éventuellement les dérivées selon les variables, afin d'écrire ces dérivées sous la forme :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \alpha_1+\cdots+\alpha_n=k.$$

Cette notation signifie qu'on a dérivé α_1 fois par rapport à x_1, α_2 fois par rapport à x_2 etc. Certains α_i peuvent être nuls et peuvent être omis dans la notation. On notera par exemple $\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2}$ la dérivée d'ordre 3 d'une fonction de 3 variables x,y,z, obtenue en dérivant une fois par rapport à x et 2 fois par rapport à z, mais aucune fois par rapport à y.

Proposition III.31 (Opérations sur les applications de classe C^k). *Soit E,E' des $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie, et $F,F_1,\dots,F_q$ des K-e.v.n. de dimension finie. Soit Ω,Ω' des ouverts de E et E' respectivement.*

1. *Soit $f,g:\Omega\to F$ de classe C^k et $\lambda\in K$. Alors $f+\lambda g$ est de classe C^k.*
2. *Soit pour $i\in[1,q]$, $f_i:\Omega\to F_i$, et $M:F_1\times\cdots\times F_q\to F$ une forme multilineaire. Si les f_i sont de classe C^k, alors $M(f_1,\dots,f_q)$ est de classe C^k.*
3. *Soit $f:\Omega'\to\Omega$ et $g:\Omega\to F$. Si f et g sont de classe C^k sur Ω' et Ω respectivement, alors $g\circ f$ est de classe C^k sur Ω.*
4. *Si $f:\Omega\to K$ ne s'annule pas et est de classe C^k, alors $\frac{1}{f}$ aussi.*
5. *Soit pour $i\in[1,q]$, $f_i:\Omega\to F_i$, et $f:\Omega\to F_1\times\cdots\times F_q$ définie par*

$$\forall x\in\Omega,\quad f(x)=(f_1(x),\dots,f_q(x)).$$

f est de classe C^k si et seulement si tout f_i est de classe C^k.

Éléments de preuve. Démonstrations non exigibles, un peu fastidieuse mais sans difficulté. Faire une récurrence, en dérivant une première fois. □

Exemple III.32. 1. *Les fonctions polynomiales $f:\mathbb{R}^n\to K$, de n variables réelles et à coefficients dans K, sont de classe C^∞.*
2. *Les fractions rationnelles aussi, sur leur domaine de définition.*
3. $\det:M_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ *est de classe C^∞.*
4. $M\mapsto M^{-1}$ *définie sur* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est de classe C^∞.*

Dans le cas de fonctions d'une seule variable réelle, on rajoute une propriété, concernant la dérivée itérée d'une forme bilinéaire. Lorsqu'on applique cette formule au cas du produit de deux réels, on retrouve la formule de Leibniz classique.

Théorème III.33 (Formule de Leibniz vectorielle)**.** *Soit E, F, G des K-evn de dimension finie, et $B : E \times F \to G$ des K-evn. Soit I un intervalle, et $f : I \to E$ et $g : I \to F$ deux applications. Si f et g sont de classe C^k, alors $B(f,g) : t \mapsto B(f(t), g(t))$ est aussi de classe C^k, et*

$$\forall t \in I, \quad B(f,g)^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} B(f^{(i)}(t), g^{(k-i)}(t))\, dt.$$

III.4 Hessienne et formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Définition III.34 (Matrice hessienne de f)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. La matrice hessienne de f en $a \in \Omega$ est*

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Proposition III.35 (Symétrie de $H_f(a)$)**.** *Sous les mêmes hypothèses, $H_f(a) \in S_n(\mathbb{R})$.*

Éléments de preuve. C'est une réexpression du théorème de Schwarz. □

Lemme III.36 (Expression de la dérivée seconde par rapport à un vecteur)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in \Omega$ et $U \in \mathbb{R}^n$. Alors, la dérivée seconde selon le vecteur U au point a s'exprime à l'aide de la hessienne :*

$$f''_{a,U}(0) = U^T H_f(a) U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i u_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad \text{où } U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

La matrice hessienne va nous permettre d'exprimer de façon élégante la formule de Taylor-Young, c'est-à-dire l'expression d'un DL à l'ordre 2 à l'aide des dérivées d'ordre 1 et 2, sous les hypothèses idoines de régularité.
Nous avons déjà obtenu une première version de cette formule, lorsque f est une fonction de 2 variables de classe C^2 au voisinage d'un point a, lors de la démonstration du théorème de Schwarz :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{1}{2}k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + o(\|H\|^2),$$

où $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$. À l'aide du lemme précédent, on obtient une réexpression synthétique de cette formule, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$f(X+H) = f(X) + \langle \nabla f(X), H \rangle + \frac{1}{2} H^\top H_f(x) H + o(\|H\|^2).$$

Plus généralement :