Théorème III.13 (Caractérisation des fonctions constantes (2))**.** *Soit Ω un ouvert connexe par arcs de E, et $f : \Omega \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est constante sur Ω*
2. *f est différentiable et df est nulle sur Ω.*

Éléments de preuve. Démonstration hors-programme.
C'est toujours la réciproque qui reste à voir.
On pourrait essayer d'adapter la preuve précédente, en montrant que si Ω est ouvert et connexe par arcs, on peut toujours joindre deux points par un arc de classe C^1. Mais cette construction n'est pas si évidente que cela à faire.
On procède donc autrement, en « grignotant » petit à petit.
Soit $a \in \Omega$, et $\Omega' \subset \Omega$ l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(a) = f(x)$. Si $\Omega' \neq \Omega$, considérer $b \in \Omega \setminus \Omega'$ et joindre a à b. Montrer l'existence d'un point c sur cet arc, étant sur la frontière de Ω'. Trouver une contradiction en utilisant la caractérisation (1) et la convexité d'une petite boule centrée en c. □

III.2 Plan tangent et noyau de la différentielle

Définition III.14 (Vecteur tangent à une partie, figure 16.3)**.** *Soit $X \subset E$ une partie de E, et $x \in X$.*

1. *Un vecteur $v \in E$ est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 tel que $\gamma'(0) = v$.*
2. *On note T_xX l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.*

Exemple III.15. *Quels sont les vecteurs tangents à $\varnothing$?*
Pour qu'un vecteur soit tangent, il faut pouvoir construire un arc γ tracé dans X. Or, $\varnothing$ ne contient aucun point. Il est donc impossible de définir un tel arc. L'ensemble des vecteurs tangents est donc l'ensemble vide : $T_x\varnothing = \varnothing$.

2. *0 est tangent à tout X non vide.*
Soit $x \in X$. On considère l'arc constant $\gamma(t) = x$ pour tout t. Cet arc est bien dérivable, $\gamma(0) = x$, et $\gamma'(0) = 0$. Le vecteur nul est donc toujours tangent.
3. *Décrire T_xX lorsque $x \in X$.*
Si x est un point isolé de X, il existe un voisinage de x ne contenant aucun autre point de X. Le seul arc possible est l'arc constant. Donc $T_xX = \{0\}$. Si x n'est pas isolé, l'ensemble peut être plus grand, comme une droite ou un plan.
4. *Décrire les vecteurs tangents à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ en $(0, 0)$.*
Soit $v = (h, k)$ un vecteur tangent. Il existe un arc $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma'(0) = (h, k)$. Comme $\gamma(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $y(t) \geq 0$ pour tout t. La dérivée en 0 est donc $y'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t}$. Puisque $y(t) \geq 0$, cette limite ne peut être négative. On a donc $k \geq 0$. Réciproquement, pour tout $k \geq 0$, l'arc $\gamma(t) = (ht, kt)$ convient car $kt \geq 0$ pour $t > 0$. Donc $T_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k \geq 0\}$.

Proposition III.16 (Vecteurs tangents à un sous-espace affine)**.** *Soit X un sous-espace affine de E de direction V. Alors, pour tout $B \in X$, $T_B(X) = V$.*

Éléments de preuve. L'inclusion directe est évidente en paramétrant des droites incluses dans X passant par B.
Réciproquement la dérivée de γ est limite d'un taux d'accroissement qui est dans V. Comme on est en dimension finie, V est fermé. □

Proposition III.17 (Vecteurs tangents à une sphère). *Soit E un espace euclidien, $c \in E$ et $r > 0$. Soit $X = S(c,r)$ et $x \in S(c,r)$. Alors $T_x X = x^\perp$. En d'autres termes, l'ensemble des vecteurs tangents à une sphère en un point x est l'orthogonal du rayon défini par x.*

Éléments de preuve. Considérer les grands cercles passant par x.
Pour l'autre inclusion, vérifier que si γ est à valeurs dans S, sa dérivée est orthogonale au rayon (dériver un produit scalaire). □

Exemple III.18. *Décrire sous forme d'une équation le plan vectoriel $T_A(S)$ où $S = S(0,1) \subset \mathbb{R}^3$ et $A = (a,b,c) \in S$.*
D'après la proposition, $T_A S = A^\perp$. L'équation de ce plan vectoriel est donc $ax+by+cz = 0$. En effet, tout vecteur $v = (x,y,z)$ orthogonal au rayon $OA = (a,b,c)$ vérifie le produit scalaire nul.

Théorème III.19 (Description d'un espace tangent à un graphe). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, et $X_0 \in \Omega$. On suppose f différentiable en X_0. L'ensemble $T_{X_0} f$ des vecteurs tangents à la courbe de f en $(X_0, f(X_0))$ est le plan d'équation*

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \ell,$$

c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs $H = (h,k,\ell) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'équation ci-dessus.

Éléments de preuve. Comme dans les autres exemples, étudier les propriétés des arcs du graphe, et réciproquement, trouver des arcs adéquats. □

Dans le cas général ($\Omega \subset E$, E de dimension finie), on obtient la description suivante :

Théorème III.20 (Espace tangent à un ensemble défini par une équation). *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction numérique de classe C^1, $X = f^{-1}(\{0\})$. Ainsi X est l'ensemble défini par l'équation $f(x) = 0$.*
Soit $a \in X$. Si $df(a) \neq 0$, l'ensemble des vecteurs tangents à X en a est égal à

$$T_a X = \mathrm{Ker}(df(a)).$$

Éléments de preuve. Hors-programme. □

Exemple III.21. *Retrouver à l'aide de ce théorème la description des vecteurs tangents à un espace affine de $\mathbb{R}^n$, décrit par une équation*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b.$$

On pose $f(x_1,\dots,x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - b$. L'ensemble est $X = f^{-1}(\{0\})$. La différentielle est $df(x)(h) = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n$, qui est non nulle si les a_i ne sont pas tous nuls. Le noyau de $df(a)$ est donc l'ensemble des h vérifiant $\sum a_i h_i = 0$. D'après le théorème, $T_aX = \mathrm{Ker}(df(a))$. C'est bien la direction de l'hyperplan affine X, qui est un espace vectoriel car X est un sous-espace affine parallèle à ce noyau.

2. *De même, retrouver la description des vecteurs tangents de la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.*
On pose $f(x) = \|x\|^2 - 1$. La sphère unité est $X = f^{-1}(\{0\})$. La différentielle est $df(a)(h) = 2\langle a,h\rangle$. Pour a sur la sphère, $df(a) \neq 0$ car $a \neq 0$. Donc $T_aX = \mathrm{Ker}(df(a)) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid \langle a,h\rangle = 0\} = a^\perp$.
3. *Retrouver la description de l'espace des vecteurs tangents au graphe d'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, lorsque f est de classe C^1 au voisinage de X_0. Généraliser pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*
Soit $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,z) = f(x) - z$. Le graphe de f est $G = g^{-1}(\{0\})$. La différentielle est $dg(x_0,f(x_0))(h,\ell) = df(x_0)(h) - \ell$. En coordonnées dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, si $df(x_0)(h) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)h_2$, alors $\mathrm{Ker}(dg(x_0,f(x_0)))$ est l'ensemble des (h,ℓ) vérifiant $\ell = df(x_0)(h)$. Donc $T_{(x_0,f(x_0))}G = \{(h,\ell) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \ell = df(x_0)(h)\}$. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on a de même $T_{(x_0,f(x_0))}G = \{(h,\ell) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid \ell = \nabla f(x_0) \cdot h\}$.

Proposition III.22 (Deuxième interprétation géométrique du gradient)**.** *Avec les hypothèses du théorème 16.3.21, si on suppose de plus que E est un espace euclidien, $T_aX = \nabla f(a)^\perp$.*

Éléments de preuve. Dans le contexte euclidien, cette formulation est équivalente à celle du théorème, par définition du gradient.
On peut le démontrer indépendamment du théorème, en considérant un arc à valeurs dans X, et en dérivant $f \circ \gamma$. □

Exemple III.23. *Retrouver l'équation des hyperplans des vecteurs tangents à la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Pour la sphère unité $S(0,1)$, on a $f(x) = \|x\|^2 - 1$ et $\nabla f(a) = 2a$. La proposition donne $T_aS = \nabla f(a)^\perp = \{h \mid \langle 2a, h\rangle = 0\} = \{h \mid \langle a, h\rangle = 0\} = a^\perp$. L'équation est donc $\langle a, h\rangle = 0$.*

Remarque III.24.
1. *Si $E = \mathbb{R}^2$, X est la ligne de niveau de valeur 0. Plus généralement, en considérant $f - b$ au lieu de f, on peut décrire de la sorte toutes les lignes de niveau. La proposition affirme que le gradient en a est orthogonal à la droite tangente à la ligne de niveau en a, ce qu'on peut réexprimer de façon plus abrégée en disant que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.*
2. *Ainsi, si f est de classe C^1 sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, en combinant les deux interprétations, la direction de plus forte pente au point a est toujours orthogonale à la ligne de niveau en a.*

Exemple III.25 (Figure 16.5)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^3}{x^4 + y^2}.$$

En exprimant le gradient, déterminer la tangente à la courbe de niveau en $(1,1)$. La figure 16.5 illustre cet exemple. Le gradient en $(1,1)$ est le vecteur AB, reporté sur le plan $z = 1$, dans lequel est tracée en rouge la courbe de niveau au point $(1,1)$.
Calculons les dérivées partielles. Posons $u(x,y) = x^2 + y^3$ et $v(x,y) = x^4 + y^2$. Alors $f = u/v$. En $(1,1)$, $u = 2$, $v = 2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{u_x v - u v_x}{v^2}, \quad u_x = 2x, \quad v_x = 4x^3.$$

Donc $u_x(1,1) = 2$, $v_x(1,1) = 4$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{2\times 2 - 2\times 4}{4} = \frac{4-8}{4} = -1$.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u_y v - u v_y}{v^2}, \quad u_y = 3y^2, \quad v_y = 2y.$$

Donc $u_y(1,1) = 3$, $v_y(1,1) = 2$. Ainsi $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{3\times 2 - 2\times 2}{4} = \frac{6-4}{4} = \frac{1}{2}$.
Le gradient est $\nabla f(1,1) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$. La tangente à la ligne de niveau $f(x,y) = f(1,1) = 1$ est la droite passant par $(1,1)$ orthogonale au gradient. Soit $M = (x,y)$ un point de cette tangente. Le vecteur $\overrightarrow{AM} = (x-1, y-1)$ doit vérifier $\nabla f(1,1) \cdot \overrightarrow{AM} = 0$. Donc :

$$-1 \cdot (x-1) + \frac{1}{2} \cdot (y-1) = 0.$$

En multipliant par 2 pour simplifier :

$$-2(x-1) + (y-1) = 0.$$

Donc $-2x + 2 + y - 1 = 0$, soit $y - 2x + 1 = 0$, ou encore $y = 2x - 1$. C'est l'équation de la tangente à la ligne de niveau en $(1,1)$.

III.3 Applications de classe C^k

Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E, $(i,j) \in [1,n]$, et $f : \Omega \to F$ admettant une dérivée partielle $\partial_i f$ sur tout Ω. Si la fonction $\partial_i f : \Omega \to F$ admet elle-même une j-ième dérivée partielle en $a \in \Omega$, on peut donc définir $\partial_j \partial_i f(a)$, la j-ième dérivée partielle de $\partial_i f$. De façon plus générale, on définit par récurrence sur k les dérivées d'ordre k :

Définition III.26 (Dérivées partielles d'ordre k)**.** *On définit, si c'est possible, les dérivées d'ordre k de f par récurrence sur k :*

- *Si $k = 1$, il s'agit des dérivées partielles $\partial_i f$.*
- *Soit $k > 1$ et $(i_1, \dots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k$. La fonction f admet en $a \in \Omega$ une dérivée par rapport successivement aux $i_1, \dots, i_{k-1}$ et i_k-ème vecteurs de la base B, notée $\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a)$, si et seulement si $\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a)$ existe au voisinage (relatif dans Ω) de a et est dérivable selon b_{i_k} en a. Ainsi,*
$$\partial_{i_k} \partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f(a) = \partial_{i_k} \left(\partial_{i_{k-1}} \dots \partial_{i_1} f \right)(a).$$

On trouve aussi les notations suivantes :

- *$\partial_{i_1,\dots,i_k} f(a)$ (attention à l'ordre des indices !),*
- *$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}(a)$, si $(x_1, \dots, x_n)$ représentent les coordonnées génériques dans la base B, en particulier si $E = \mathbb{R}^n$ muni de la base canonique.*

On peut définir des différentielles d'ordre supérieur, mais cette notion est hors programme, et les objets manipulés deviennent de plus en plus complexes. Pour cette raison, nous définissons la classe C^k à l'aide des dérivées partielles d'ordre k. Cette définition est une généralisation de la caractérisation de la classe C^1 par les dérivées partielles premières.

Définition III.27 (Applications de classe C^k)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ une application définie sur l'ouvert Ω de E.*

1. *On dit que f est de classe C^k sur Ω si toutes les dérivées d'ordre k de f existent (il y en a n^k), et sont continues sur Ω.*
2. *On dit que f est de classe C^k au voisinage de $a \in \Omega$, s'il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $f|_V$ soit de classe C^k sur V.*
3. *On note $C^k(\Omega, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur Ω, à valeurs dans F. Par convention, $C^0(\Omega, F)$ est l'ensemble des fonctions continues.*
4. *On dit que f est de classe C^∞ sur Ω si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*
5. *On note $C^\infty(\Omega, F)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur Ω, à valeurs dans F.*

Remarque III.28. *Si f est de classe C^k, alors :*

- *f est de classe C^j pour tout $j \leq k$;*
- *plus généralement, si $\ell \leq k$ et $(i_1, \dots, i_\ell) \in [\![0,n]\!]^\ell$, $\partial_{i_1,\dots,i_\ell} f$ est de classe $C^{k-\ell}$.*

Pour étudier la classe C^k, il y a donc a priori n^k dérivées à étudier. Mais en pratique, cela en fait moins, car sous des conditions assez peu restrictives, on va retrouver plusieurs fois la même, dans le sens où l'ordre de dérivation (i.e. le choix de l'ordre des variables par rapport auxquelles on dérive) n'importe pas. C'est ce que dit le théorème suivant.

Théorème III.29 (Théorème de Schwarz)**.** *Soit $f : \Omega \to F$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E, et $a \in \Omega$. Si f est de classe C^2 au voisinage de a, alors*
$$\forall (i,j) \in [1,n], \quad \partial_i \partial_j f(a) = \partial_j \partial_i f(a).$$