$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)\cdot(-e^v),$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cdots) - e^v\,\frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)}.$$

Pour $k=3$ (dérivée partielle par rapport à w) :

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_3}{\partial w}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)\cdot 3,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) = 3\,\frac{\partial f}{\partial z}(u^2+v,\ 2v,\ 3w-e^v)}.$$

Proposition II.53 (Différentielle de $(f_1,\dots,f_p)$)**.** *Soit Ω un ouvert de E, et $F_1,\dots,F_q$ des K-e.v.n. de dimension finie, et soit $f_i:\Omega\to F_i$, $i\in[1,q]$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i est différentiable en $a\in\Omega$;*
2. *$f=(f_1,\dots,f_q):E\to F_1\times\cdots\times F_q$ est différentiable en a.*

Si c'est le cas,

$$df(a) = (df_1(a),\dots,df_q(a)) \in \mathcal{L}(E, F_1\times\cdots\times F_q),$$

c'est-à-dire :

$$\forall h\in E,\quad df(a) = (df_1(a)\cdot h,\dots,df_q(a)\cdot h).$$

Remarque II.54. *Retrouver de la sorte l'expression de la jacobienne.*

III. Applications de classe C^n

III.1 Applications de classe C^1

Définition III.1 (Application de classe C^1)**.** *Soit $f:\Omega\to F$. On dit que f est de classe C^1 sur Ω si :*

1. *f est différentiable en tout point de Ω*
2. *$df:\Omega\to\mathcal{L}(E,F)$ est continue.*

Exemple III.2. 1. *Soit $f:E\to F$ une application linéaire, alors f est de classe C^1.*
2. *Soit f une application constante, alors f est de classe C^1.*

Proposition III.3 (Opérations sur les applications de classe C^1)**.** *Soit E,E' des $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie, et $F,F_1,\dots,F_q$ des K-e.v.n. de dimension finie. Soit Ω,Ω' des ouverts de E et E' respectivement.*

1. *Soit $f,g:\Omega\to F$ de classe C^1 et $\lambda\in K$. Alors $f+\lambda g$ est de classe C^1.*
2. *Soit pour $i\in[\![1,q]\!]$, $f_i:\Omega\to F_i$, et $M:F_1\times\cdots\times F_q\to F$ une forme multilinéaire. Si les f_i sont de classe C^1, alors $M(f_1,\dots,f_q)$ est de classe C^1.*
3. *Soit $f:\Omega'\to\Omega$ et $g:\Omega\to F$. Si f et g sont de classe C^1 sur Ω' et Ω respectivement, alors $g\circ f$ est de classe C^1 sur Ω.*
4. *Si $f:\Omega\to K$ ne s'annule pas et est de classe C^1, alors $\frac{1}{f}$ aussi.*

5. *Soit pour $i \in [1,q]$, $f_i : \Omega \to F_i$, et $f : \Omega \to F_1 \times \cdots \times F_q$ définie par*

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)).$$

Alors f est de classe C^1 si et seulement si tout f_i est de classe C^1.

Éléments de preuve. Attention à bien comprendre sur quelle variable porte la continuité (le point $x \in \Omega$ en lequel on considère la différentielle). Cela conditionne la validité de l'argument donné. Par exemple, pour la composée, la différentielle $d(g \circ f)$ s'exprime comme composée de deux différentielles, mais la composée porte sur la variable h, et non sur a qui est à voir plutôt comme un paramètre. Donc on ne peut pas obtenir la continuité de cette différentielle par propriété de continuité d'une composée.
En revanche, puisque la composition se fait entre applications linéaires d'espaces de dimension finie, l'application $(f,g) \mapsto g \circ f$ est une application bilinéaire entre espaces de dimension finie, donc elle-même continue. C'est ce point qui est en jeu ici.
Pour 2, on peut remarquer que si $M : E^n \to F$ est une application multilinéaire, alors $\tilde{M} : E^{k-1} \times \mathcal{L}(E,F) \times E^{n-k} \to \mathcal{L}(E,F)$ définie par

$$\tilde{M}(x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha, x_{k+1}, \ldots, x_n)(x) = M(x_1, \ldots, x_{k-1}, \alpha(x), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

est également multilinéaire, donc continue, tous les espaces en jeu étant de dimension finie. □

Vous avez défini l'année dernière le caractère C^1 des fonctions de 2 variables à l'aide des dérivées partielles. On retrouve ce point de vue via la caractérisation 16.3.5. On démontre d'abord le résultat suivant, qui n'apparaît qu'implicitement au programme (cela peut être vu comme un sous-produit de la caractérisation 16.3.5 et de la définition de la différentielle).

Théorème III.4 (Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour les dérivées partielles). *Soit $f : \Omega \to K$ une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit B une base de E, et $a \in \Omega$. On suppose que pour tout f, $\partial_k f$ est définie et continue au voisinage de a. Alors*

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} h_k \partial_k f(a) + o(h).$$

où $(h_1, \ldots, h_n) = [h]_B$.

Éléments de preuve. Utiliser la formule de Taylor pour les fonctions d'une variable, successivement pour chacune des n variables. □

Théorème III.5 (Caractérisation de la classe C^1 par les dérivées partielles). *Soit $f : \Omega \to F$ et $B = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est de classe C^1 sur Ω;*
2. *f admet des dérivées partielles en tout point selon la base B, et pour tout $k \in [1,n]$, $\partial_k f : \Omega \to F$ est continue.*

Éléments de preuve. Démonstration non exigible.

- Se ramener à $f : \Omega \to K$, en considérant les coordonnées dans une base C de F.
- Utiliser la décomposition $df_i(a) = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f_i$.

Cela revient en gros à utiliser le fait que df est continue si et seulement si $\mathrm{Mat}_{B,C}(df)$ est continue, ce qui est la matrice des dérivées partielles des coordonnées dans C (l'analogue de la jacobienne). Dans le sens (ii) $\Rightarrow$ (i), ne pas oublier de montrer d'abord la différentiabilité de f, en utilisant la formule de Taylor-Young. □

Remarque III.6. *La formule de Taylor 16.3.4 se réécrit alors simplement*

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + o(h),$$

qui n'est rien de plus que la combinaison de la définition de la différentielle et du gradient ∇f.

Corollaire III.7 (Continuité via les dérivées partielles)**.** *Si $E = \mathbb{R}^n$ et si f admet des dérivées partielles par rapport à tout x_i en a, et que ces dérivées partielles sont continues au voisinage de a, alors f est continue au voisinage de a.*

Remarque III.8 (Avertissement)**.** *Comme on l'a déjà vu, l'existence seule des dérivées partielles (et même plus généralement des dérivées directionnelles) ne suffit pas à établir la continuité.*

Théorème III.9 (Intégrale de la différentielle le long d'un arc)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ une application de classe C^1, et $\gamma : [0,1] \to \Omega$ un chemin de classe C^1 tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Alors*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Éléments de preuve. L'intégrande est la dérivée de $f \circ \gamma : [0,1] \to F$. □

Remarque III.10. *Ce théorème peut être vu comme une généralisation du théorème fondamentale de l'analyse, puisqu'en prenant $E = \mathbb{R}$ et $\gamma : t \mapsto a(1-t) + bt$, puis en faisant un changement de variable affine, on retrouve*

$$\int_a^b f(t)\, dt = f(b) - f(a)$$

lorsque $f : [a,b] \to F$ est de classe C^1.

Exemple III.11. *Si f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω et si $[a,b] \subset \Omega$, alors*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a(1-t) + bt) \cdot (b-a)\, dt.$$

2. *De façon équivalente, si f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω et si $[a, a+u] \subset \Omega$, alors*

$$f(a+u) - f(a) = \int_0^1 df(a+tu) \cdot u\, dt.$$

3. *Si f est de classe C^1 sur l'ouvert Ω et si $\gamma : [0,1] \to \Omega$ est un lacet de classe C^1 (i.e. $\gamma(a) = \gamma(b)$), alors*

$$\int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = 0.$$

Théorème III.12 (Caractérisation des fonctions constantes (1))**.** *Soit Ω un ouvert convexe de E, et $f : \Omega \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est constante sur Ω*
2. *f est différentiable et df est nulle sur Ω.*

Éléments de preuve.

- Le sens direct est déjà vu.
- Pour le sens réciproque, utiliser le théorème 16.3.9 sur une paramétrisation du segment $[a,b]$ pour montrer que pour tout $a, b \in \Omega$, $f(a) = f(b)$.

□

Ce théorème admet une généralisation qui est aussi au programme, mais sans sa démonstration (que nous esquissons quand même).

Théorème III.13 (Caractérisation des fonctions constantes (2))**.** *Soit Ω un ouvert connexe par arcs de E, et $f : \Omega \to F$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est constante sur Ω*
2. *f est différentiable et df est nulle sur Ω.*

Éléments de preuve. Démonstration hors-programme.
C'est toujours la réciproque qui reste à voir.
On pourrait essayer d'adapter la preuve précédente, en montrant que si Ω est ouvert et connexe par arcs, on peut toujours joindre deux points par un arc de classe C^1. Mais cette construction n'est pas si évidente que cela à faire.
On procède donc autrement, en « grignotant » petit à petit.
Soit $a \in \Omega$, et $\Omega' \subset \Omega$ l'ensemble des points $x \in \Omega$ tels que $f(a) = f(x)$. Si $\Omega' \neq \Omega$, considérer $b \in \Omega \setminus \Omega'$ et joindre a à b. Montrer l'existence d'un point c sur cet arc, étant sur la frontière de Ω'. Trouver une contradiction en utilisant la caractérisation (1) et la convexité d'une petite boule centrée en c. □

III.2 Plan tangent et noyau de la différentielle

Définition III.14 (Vecteur tangent à une partie, figure 16.3)**.** *Soit $X \subset E$ une partie de E, et $x \in X$.*

1. *Un vecteur $v \in E$ est tangent à X en x s'il existe $\varepsilon > 0$ et un arc $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to X$ dérivable en 0 tel que $\gamma'(0) = v$.*
2. *On note T_xX l'ensemble des vecteurs tangents à X en x.*

Exemple III.15. *Quels sont les vecteurs tangents à $\varnothing$?*
Pour qu'un vecteur soit tangent, il faut pouvoir construire un arc γ tracé dans X. Or, $\varnothing$ ne contient aucun point. Il est donc impossible de définir un tel arc. L'ensemble des vecteurs tangents est donc l'ensemble vide : $T_x\varnothing = \varnothing$.

2. *0 est tangent à tout X non vide.*
Soit $x \in X$. On considère l'arc constant $\gamma(t) = x$ pour tout t. Cet arc est bien dérivable, $\gamma(0) = x$, et $\gamma'(0) = 0$. Le vecteur nul est donc toujours tangent.
3. *Décrire T_xX lorsque $x \in X$.*
Si x est un point isolé de X, il existe un voisinage de x ne contenant aucun autre point de X. Le seul arc possible est l'arc constant. Donc $T_xX = \{0\}$. Si x n'est pas isolé, l'ensemble peut être plus grand, comme une droite ou un plan.
4. *Décrire les vecteurs tangents à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ en $(0, 0)$.*
Soit $v = (h, k)$ un vecteur tangent. Il existe un arc $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ tel que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma'(0) = (h, k)$. Comme $\gamma(t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $y(t) \geq 0$ pour tout t. La dérivée en 0 est donc $y'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)-y(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{y(t)}{t}$. Puisque $y(t) \geq 0$, cette limite ne peut être négative. On a donc $k \geq 0$. Réciproquement, pour tout $k \geq 0$, l'arc $\gamma(t) = (ht, kt)$ convient car $kt \geq 0$ pour $t > 0$. Donc $T_{(0,0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) = \{(h, k) \in \mathbb{R}^2 \mid k \geq 0\}$.

Proposition III.16 (Vecteurs tangents à un sous-espace affine)**.** *Soit X un sous-espace affine de E de direction V. Alors, pour tout $B \in X$, $T_B(X) = V$.*

Éléments de preuve. L'inclusion directe est évidente en paramétrant des droites incluses dans X passant par B.
Réciproquement la dérivée de γ est limite d'un taux d'accroissement qui est dans V. Comme on est en dimension finie, V est fermé. □