Dans la base canonique (E_{ij}), on trouve :

$$df(I_n)(E_{ij}) = \mathrm{tr}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

ce qui donne bien les coordonnées de I_n.
Ainsi, le résultat $\nabla f(I_n) = I_n$ est intrinsèque et ne dépend pas de l'ordre choisi pour énumérer la base, pourvu que celle-ci soit orthonormée.

II.4 Opérations sur les applications différentiables

On se place à nouveau dans la situation générale : E est un e.v.n. de dimension finie sur $\mathbb{R}$, F est un e.v.n. de dimension finie de K et Ω est un ouvert de E.

Proposition II.41 (Linéarité). *Soit f et $g : \Omega \to F$ différentiables en a, et $\lambda, \mu \in K$. Alors $f + \lambda g$ est différentiable en a et*

$$d(f + \lambda g)(a) = d(f)(a) + \lambda dg(a).$$

Éléments de preuve. Revenir à la définition par DL. □

Proposition II.42 (Différentielle d'une forme multilinéaire). *Soit Ω un ouvert de E, $F_1, \dots, F_n$ des K-e.v.n. de dimension finie, et $f_i : \Omega \to F_i$ différentiables en $a \in \Omega$. Soit $M : F_1 \times \cdots \times F_n \to F$ une application multilinéaire. Alors*

$$M(f_1, \dots, f_n) : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_n(x))$$

est différentiable en a, et

$$\forall h \in E, \quad dM(f_1, \dots, f_n)(a) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} M(f_1(a), \dots, df_k(a) \cdot h, \dots, f_n(a)).$$

Éléments de preuve. Par DL et majoration de la forme multilinéaire (par continuité). □

Exemple II.43. *Soit $f, g : \Omega \to K$, $\Omega \subset E$. Exprimer la différentielle de fg.*

2. *Si $f : \Omega \to F$ avec F euclidien, et si f est différentiable en a, montrer que $\|f\|^2$ est différentiable en tout point et exprimer sa différentielle.*
3. *En particulier, si E est un espace euclidien, exprimer la différentielle en tout point de $X \mapsto X^2$.*

Solution
Dérivée d'un produit de matrices. Le produit matriciel $M(A, B) = AB$ est une application bilinéaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$. Par le corollaire sur la dérivée d'une forme multilinéaire, si A et B sont dérivables,

$$\frac{d}{dt}\big(A(t)B(t)\big) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Exemple :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1+t \\ 3 & 2+2t & 2 \\ 1 & t & t \end{pmatrix}, \quad A'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 2t & 4 & -t \\ 0 & 1 & 1-t \\ 2 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad B'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}(A(t)B(t)) = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2t&4&-t\\0&1&1-t\\2&1&t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&4&1+t\\3&2+2t&2\\1&t&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Dérivée de la norme. Soit $N(t) = \|X(t)\| = \sqrt{\langle X(t), X(t)\rangle}$. La fonction $t \mapsto \langle X(t), X(t)\rangle$ est dérivable comme composée de X et de la forme bilinéaire symétrique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ (cas particulier du corollaire avec $n = 2$ et $f_1 = f_2 = X$) :

$$\frac{d}{dt}\langle X(t), X(t)\rangle = \langle X'(t), X(t)\rangle + \langle X(t), X'(t)\rangle = 2\langle X'(t), X(t)\rangle.$$

Comme $X(t) \neq 0$, $t \mapsto \|X(t)\|$ est dérivable sur I (car $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et

$$\frac{d}{dt}\|X(t)\| = \frac{1}{2\|X(t)\|}\cdot 2\langle X'(t), X(t)\rangle = \frac{\langle X(t), X'(t)\rangle}{\|X(t)\|}.$$

Dérivée du vecteur unitaire. Écrivons $U(t) = \frac{X(t)}{\|X(t)\|} = \varphi(X(t))$ où $\varphi(y) = \frac{y}{\|y\|}$. C'est aussi $U(t) = X(t)\cdot(\|X(t)\|)^{-1}$. En utilisant la dérivée d'un produit (cas bilinéaire, avec la multiplication scalaire-vecteur) et le résultat précédent :

$$U'(t) = X'(t)\cdot\frac{1}{\|X(t)\|} + X(t)\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|X(t)\|}\right).$$

Or $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\|X(t)\|}\right) = -\frac{\|X(t)\|'}{\|X(t)\|^2} = -\frac{\langle X(t),X'(t)\rangle}{\|X(t)\|^3}$. Donc

$$U'(t) = \frac{X'(t)}{\|X(t)\|} - X(t)\frac{\langle X(t), X'(t)\rangle}{\|X(t)\|^3} = \frac{X'(t)\|X(t)\|^2 - X(t)\langle X(t), X'(t)\rangle}{\|X(t)\|^3}.$$

Dérivée de $X(t)^T AY(t)$. L'application $(X, Y) \mapsto X^T AY$ est bilinéaire (à valeurs scalaires). Par le corollaire,

$$\frac{d}{dt}\big(X(t)^T AY(t)\big) = X'(t)^T AY(t) + X(t)^T AY'(t).$$

Dérivée d'une puissance de matrice. Montrons par récurrence que $\frac{d}{dt}X(t)^n = \sum_{k=0}^{n-1} X(t)^k X'(t) X(t)^{n-1-k}$. Pour $n = 1$: $\frac{d}{dt}X(t) = X'(t)$, formule vérifiée. Supposons la propriété vraie au rang n. Alors

$$\frac{d}{dt}X(t)^{n+1} = \frac{d}{dt}\big(X(t)^n X(t)\big).$$

Le produit matriciel est bilinéaire, donc

$$\frac{d}{dt}\big(X(t)^n X(t)\big) = \left(\frac{d}{dt}X(t)^n\right)X(t) + X(t)^n X'(t).$$

Par hypothèse de récurrence,

$$\frac{d}{dt}X(t)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k X' X^{n-1-k}\right)X + X^n X' = \sum_{k=0}^{n-1} X^k X' X^{n-k} + X^n X' = \sum_{k=0}^{n} X^k X' X^{n-k},$$

ce qui est la formule au rang $n+1$.

Dérivée du déterminant. Le déterminant $\det_B$ est une forme n-linéaire alternée. Par le corollaire (cas particulier 3), en dérivant colonne par colonne :

$$\frac{d}{dt}\det(C_1(t), C_2(t), C_3(t)) = \det(C_1'(t), C_2(t), C_3(t)) + \det(C_1(t), C_2'(t), C_3(t)) + \det(C_1(t), C_2(t), C_3'(t)).$$

Ici $C_1(t) = \begin{pmatrix} t-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ t+1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C_3(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ t-3 \end{pmatrix}$. Leurs dérivées sont $C_1'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_2'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_3'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\Delta'(t) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & t+1 & 2 \\ 0 & 5 & t-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t-2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & t-3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} t-2 & 3 & 0 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant :

$$\begin{aligned} \Delta'(t) &= 1 \cdot \big((t+1)(t-3) - 10\big) + 1 \cdot \big((t-2)(t-3) - 12\big) + 1 \cdot \big((t-2)(t+1) - 0\big) \\ &= (t^2 - 2t - 13) + (t^2 - 5t - 6) + (t^2 - t - 2) \\ &= 3t^2 - 8t - 21. \end{aligned}$$

Proposition II.44 (Différentielle d'une composée)**.** *Soit E et F deux e.v.n. de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et G un e.v.n. de dimension finie sur K. Soit Ω un ouvert de E et Ω' un ouvert de f, et $f : \Omega \to F$ et $g : \Omega' \to G$ deux applications. Soit $a \in \Omega$. On suppose que*

1. *f est différentiable en a*
2. *$f(a) \in \Omega'$ et g est différentiable en $f(a)$.*

Alors $g \circ f$ est différentiable en a, et

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Éléments de preuve. Composer les DL. □

Corollaire II.45 (Composition par une fonction réelle)**.** *Soit Ω un ouvert d'un e.v.n. E, et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $a \in \Omega$, si $f(a) \in I$ et si g dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et*

$$d(g \circ f)(a) = g'(f(a))df(a).$$

Exemple II.46. *Différentiabilité de $x \mapsto \|x\|$ en tout $x \neq 0$ dans un espace euclidien.*

2. *Différentiabilité de $\|f\|$ lorsque f l'est.*

Corollaire II.47 (Dérivée le long d'un arc)**.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E. Soit $\gamma : I \to \Omega$ et $f : \Omega \to F$. Si γ est dérivable en $a \in I$, et f différentiable en $\gamma(a)$, alors $f \circ \gamma$ est dérivable en a et*

$$(f \circ \gamma)'(a) = df(\gamma(a)) \cdot \gamma'(a) = \langle \nabla f(\gamma(a)), \gamma'(a) \rangle.$$

Exemple II.48. *Dérivée de $t \mapsto f(a + th)$. Cohérence en 0.*

Corollaire II.49 (Règle de la chaîne)**.** *Avec les notations et hypothèses de la proposition 16.2.51, si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, et $C = (c_1, \ldots, c_p)$ une base de F,*

$$\forall k \in [1, n], \quad \partial_{B,k}(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^{p} \partial_{c,i} g(f(a)) \partial_{B,k} f(a).$$

Remarque II.50 (Avertissement)**.** *Attention à ne pas confondre $\partial_i g(f(a))$ et $\partial_i (g \circ f)(a)$. Quelle est la différence entre les deux ?*

Corollaire II.51 (Réexpression de la règle de la chaîne dans $\mathbb{R}^n$)**.** *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, et si les bases considérées sont les bases canoniques, on obtient, avec les mêmes hypothèses :*

$$\forall k \in [1, n], \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a),$$

où $(x_1, \ldots, x_n)$ représentent les coordonnées génériques dans $E = \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_p)$ les coordonnées génériques dans $F = \mathbb{R}^p$.
De façon équivalente, en exprimant coordonnée par coordonnée, $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.

Exemple II.52. *Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en tout (x, y, z). Exprimer les dérivées partielles de*

$$g(u, v, w) = f(u^2 + v, 2v, 3w - e^v).$$

Solution On applique le corollaire sur la règle de la chaîne dans $\mathbb{R}^n$.
Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\Phi(u, v, w) = (f_1(u, v, w), f_2(u, v, w), f_3(u, v, w))$$

avec

$$f_1(u, v, w) = u^2 + v, \qquad f_2(u, v, w) = 2v, \qquad f_3(u, v, w) = 3w - e^v.$$

Alors $g = f \circ \Phi$.
Puisque f admet des dérivées partielles en tout point et que Φ est différentiable (ses composantes sont polynomiales ou exponentielle), le corollaire donne pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial y_i}(\Phi(a)) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(a),$$

où $(x_1, x_2, x_3) = (u, v, w)$ sont les coordonnées dans $\mathbb{R}^3$ (variable de dérivation) et $(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$ sont les coordonnées dans l'espace de départ f.

Calcul des dérivées partielles de Φ :

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial w} = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} = 2, \quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial w} = 0,$$
$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} = -e^v, \quad \frac{\partial \Phi_3}{\partial w} = 3.$$

Pour $k = 1$ (dérivée partielle par rapport à u) :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v, 2v, 3w - e^v) \cdot (2u) + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdots) \cdot 0,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u, v, w) = 2u \, \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 + v, \ 2v, \ 3w - e^v)}.$$

Pour $k = 2$ (dérivée partielle par rapport à v) :

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)\cdot(-e^v),$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial v}(u,v,w) = \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots) + 2\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cdots) - e^v\,\frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)}.$$

Pour $k=3$ (dérivée partielle par rapport à w) :

$$\frac{\partial g}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_1}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_2}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}(\Phi)\cdot\frac{\partial \Phi_3}{\partial w}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\cdots)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(\cdots)\cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial z}(\cdots)\cdot 3,$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial w}(u,v,w) = 3\,\frac{\partial f}{\partial z}(u^2+v,\ 2v,\ 3w-e^v)}.$$

Proposition II.53 (Différentielle de $(f_1,\dots,f_p)$)**.** *Soit Ω un ouvert de E, et $F_1,\dots,F_q$ des K-e.v.n. de dimension finie, et soit $f_i:\Omega\to F_i$, $i\in[1,q]$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *Pour tout $i\in[\![1,q]\!]$, f_i est différentiable en $a\in\Omega$;*
2. *$f=(f_1,\dots,f_q):E\to F_1\times\cdots\times F_q$ est différentiable en a.*

Si c'est le cas,

$$df(a) = (df_1(a),\dots,df_q(a)) \in \mathcal{L}(E, F_1\times\cdots\times F_q),$$

c'est-à-dire :

$$\forall h\in E,\quad df(a) = (df_1(a)\cdot h,\dots,df_q(a)\cdot h).$$

Remarque II.54. *Retrouver de la sorte l'expression de la jacobienne.*

III. Applications de classe C^n

III.1 Applications de classe C^1

Définition III.1 (Application de classe C^1)**.** *Soit $f:\Omega\to F$. On dit que f est de classe C^1 sur Ω si :*

1. *f est différentiable en tout point de Ω*
2. *$df:\Omega\to\mathcal{L}(E,F)$ est continue.*

Exemple III.2. 1. *Soit $f:E\to F$ une application linéaire, alors f est de classe C^1.*
2. *Soit f une application constante, alors f est de classe C^1.*

Proposition III.3 (Opérations sur les applications de classe C^1)**.** *Soit E,E' des $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie, et $F,F_1,\dots,F_q$ des K-e.v.n. de dimension finie. Soit Ω,Ω' des ouverts de E et E' respectivement.*

1. *Soit $f,g:\Omega\to F$ de classe C^1 et $\lambda\in K$. Alors $f+\lambda g$ est de classe C^1.*
2. *Soit pour $i\in[\![1,q]\!]$, $f_i:\Omega\to F_i$, et $M:F_1\times\cdots\times F_q\to F$ une forme multilinéaire. Si les f_i sont de classe C^1, alors $M(f_1,\dots,f_q)$ est de classe C^1.*
3. *Soit $f:\Omega'\to\Omega$ et $g:\Omega\to F$. Si f et g sont de classe C^1 sur Ω' et Ω respectivement, alors $g\circ f$ est de classe C^1 sur Ω.*
4. *Si $f:\Omega\to K$ ne s'annule pas et est de classe C^1, alors $\frac{1}{f}$ aussi.*