II.2 Différentielles

En particulier, d'après la remarque clôturant le paragraphe précédent, les fonctions de 2 variables suffisamment régulières se comportent à première approximation comme la fonction affine

$$X \mapsto f(a) + \langle X - a, \nabla f(a)\rangle,$$

donc la partie linéaire est l'application linéaire est

$$Y \mapsto \langle Y, \nabla f(a)\rangle = D_Y f(a).$$

Ainsi, sous certaines conditions de régularité, la dérivée directionnelle en a est une application linéaire en la direction, et permet de définir un développement limité à l'ordre 1.
C'est l'existence de cette approximation linéaire qui définit la notion de différentiabilité d'une application (tout comme la dérivabilité d'une fonction d'une variable équivaut à l'existence d'un DL1).

Définition II.19 (Différentiabilité et différentielle de f)**.** *Soit $f : \Omega \to F$, et $a \in \Omega$.*

1. *On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que au voisinage de a,*
$$f(x) = f(a) + u(x - a) + o(\|x - a\|).$$
2. *Dans ce cas, l'application linéaire u est notée $df(a)$, et est appelée différentielle de f au point a, ou application linéaire tangente à f en a.*

Ainsi, la différentielle $df(a)$ est caractérisée par :

1. *sa linéarité ($df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$)*
2. *le DL $f(a + h) = f(a) + [df(a)](h) + o(\|h\|)$.*

Pour alléger les notations, on écrira souvent $o(h)$ au lieu de $o(\|h\|)$ (et de même aux ordres supérieurs), et on omettra les crochets et parenthèses en écrivant

$$[df(a)](h) = df(a) \cdot h.$$

Remarque II.20. *Attention à bien comprendre les significations des différentes parenthèses. Si f est différentiable sur tout Ω par exemple,*

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$$

est une fonction qui à tout point de Ω associe une application linéaire, qui est la partie linéaire de l'approximation affine de f en a. Pour tout a,

$$df(a) : E \to F$$

est donc une application linéaire, qu'on peut ensuite évaluer en $h \in E$. Nous verrons plus loin que, comme dans le cas d'une fonction de deux variables, $df(a) \cdot h$ est la dérivée directionnelle en a selon u.

Cette définition est à rapprocher de la caractérisation de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle par le DL1. D'ailleurs, cette caractérisation permet d'en déduire le rapport entre dérivée et différentielle dans le cas d'une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition II.21 (Différentielle d'une application d'une variable réelle)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a, et dans ce cas :*

$$df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & f'(a) \cdot h \end{array}$$

Cette proposition permet de voir la plupart des résultats suivants comme généralisation de la situation réelle bien connue.

Méthode II.22 (Montrer que f est différentiable, méthode 1)**.** *Pour montrer que f est différentiable en a et calculer sa différentielle, on peut effectuer un DL1 en a.*

Exemple II.23. *Différentiabilité et différentielle en $(0,2,1)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \sin(x) - \frac{1}{1+x-y-z}$.*

2. *Différentiabilité en M et différentielle de $M \mapsto M^k$, définie sur $M_n(\mathbb{R})$ à valeurs dans $M_n(\mathbb{R})$.*
3. *Différentiabilité et différentielle en 0 de $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$.*
Solution

1. ***Différentiabilité et différentielle en** $(0,2,1)$ **de** $f(x,y,z) = \sin(x) - \frac{1}{1+x-y-z}$*

(a) ***Différentiabilité :***
La fonction f est définie comme la somme de deux fonctions :

- *$f_1(x,y,z) = \sin(x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ car c'est la composée de $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (de classe C^∞) avec la projection sur la première coordonnée (linéaire donc C^∞).*
- *$f_2(x,y,z) = -\frac{1}{1+x-y-z}$ est une fonction rationnelle. Elle est définie et de classe C^∞ sur l'ouvert $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1+x-y-z \neq 0\}$.*

En $(0,2,1)$, on a $1+0-2-1 = -2 \neq 0$, donc $(0,2,1) \in U$. Ainsi, f_2 est de classe C^∞ au voisinage de $(0,2,1)$.
La somme de deux fonctions de classe C^1 étant de classe C^1, f est différentiable en $(0,2,1)$ (et même C^∞ au voisinage de ce point).

(b) ***Différentielle :***
Calculons les dérivées partielles en $(0,2,1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \cos(x) + \frac{1}{(1+x-y-z)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{1}{(1+x-y-z)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{1}{(1+x-y-z)^2}
\end{aligned}$$

En $(0,2,1)$: $1+x-y-z = -2$, donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,2,1) &= \cos(0) + \frac{1}{(-2)^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,2,1) &= \frac{1}{4} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(0,2,1) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi, la différentielle de f en $(0,2,1)$ est l'application linéaire :

$$\mathrm{d}f(0,2,1) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{d}f(0,2,1)\cdot(h,k,\ell) = \frac{5}{4}h + \frac{1}{4}k + \frac{1}{4}\ell$$

Sous forme matricielle dans la base canonique :

$$\mathrm{d}f(0,2,1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2. ***Différentiabilité de*** $M \mapsto M^k$ ***sur*** $M_n(\mathbb{R})$
Considérons $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ *définie par* $f(M) = M^k$ *avec* $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) ***Différentiabilité en*** M ***:***
Pour $H \in M_n(\mathbb{R})$ *petit, développons* $f(M+H)$ *:*

$$f(M+H) = (M+H)^k = \underbrace{(M+H)(M+H)\cdots(M+H)}_{k \text{ fois}}$$

En développant ce produit, on obtient des termes de différentes puissances en H*. Plus précisément :*

$$(M+H)^k = M^k + \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i} + \text{termes en } H^2, H^3, \ldots, H^k$$

Pour justifier cette formule, considérons l'expression développée. Chaque terme du développement de $(M+H)^k$ *est un produit de* k *facteurs, chacun étant soit* M *soit* H*.*
Les termes linéaires en H *sont ceux où exactement un des* k *facteurs est* H*. Si* H *est en position* $i+1$ *(avec* $0 \leq i \leq k-1$*), alors on a* i *facteurs* M *avant* H *et* $k-1-i$ *facteurs* M *après* H*, ce qui donne* $M^i H M^{k-1-i}$*.*
Il y a k *choix pour la position de* H*, donc la somme de tous ces termes linéaires est :*

$$\sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$$

(b) ***Expression de la différentielle :***
Posons $L(H) = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}$*. Cette application est :*

- ***Linéaire en*** H *: c'est une combinaison linéaire d'applications de la forme* $H \mapsto M^i H M^{k-1-i}$ *qui sont linéaires.*
- ***Continue*** *: car toute application linéaire en dimension finie est continue.*

Montrons que le reste $R(H) = f(M+H) - f(M) - L(H)$ *est un* $o(\|H\|)$*. En effet,* $R(H)$ *est une somme de termes contenant au moins deux facteurs* H*. Chacun de ces termes est de la forme* $AHBHC$ *où* A, B, C *sont des produits de matrices* M *et* H*. Par sous-multiplicativité de la norme,* $\|AHBHC\| \leq \|A\|\|B\|\|C\|\|H\|^2$*.*
Puisque $\|A\|, \|B\|, \|C\|$ *restent bornés quand* $H \to 0$ *(car ils dépendent de* M *qui est fixe), on a* $\|R(H)\| = O(\|H\|^2) = o(\|H\|)$*.*
Ainsi, f *est différentiable en* M *et :*

$$\boxed{\mathrm{d}f(M) \cdot H = \sum_{i=0}^{k-1} M^i H M^{k-1-i}}$$

(c) ***Cas particulier*** $k = 2$ ***:*** $\mathrm{d}f(M) \cdot H = MH + HM$

(d) ***Cas particulier*** $k = 3$ ***:*** $\mathrm{d}f(M) \cdot H = M^2 H + MHM + HM^2$

3. ***Différentiabilité et différentielle en*** 0 ***de*** $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$

(a) ***Différentiabilité :***
Par définition, $\exp(M) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M^p}{p!}$*. Pour* H *petit, développons :*

$$\begin{aligned}\exp(H) &= I + H + \frac{H^2}{2!} + \frac{H^3}{3!} + \cdots + \frac{H^p}{p!} + \cdots \\ &= I + H + \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{H^p}{p!}\end{aligned}$$

L'application $L(H) = H$ est linéaire. Le reste est :

$$R(H) = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{H^p}{p!}$$

Majorons la norme de ce reste. Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$ (sous-multiplicative) :

$$\|R(H)\| \leq \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\|H\|^p}{p!} = e^{\|H\|} - 1 - \|H\|$$

Or, on sait que $e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x)$ quand $x \to 0$. Donc $\|R(H)\| = o(\|H\|)$.
Ainsi, $\exp$ est différentiable en 0 et :

$$\mathrm{d}\exp(0) \cdot H = H$$

Proposition II.24 (Différentiable implique continu)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a. Alors f est continue en a.*

Éléments de preuve. Par DL! Remarquer que $df(a)$ est continue en 0 puisque linéaire en dimension finie. □

Proposition II.25 (Différentielle et dérivées directionnelles)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a. Alors f admet en a des dérivées selon toute direction $u \in E$, et*

$$D_u f(a) = df(a) \cdot u.$$

En particulier, si $B = (b_1, \ldots, b_n)$ est une base de E, et si f est identifiée à une fonction des variables $x_1, \ldots, x_n$ coordonnées dans la base B,

$$\forall k \in [1, n], \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a) \cdot b_k.$$

Éléments de preuve. Encore par DL. □

II.2.1 Matrice de la différentielle

Soit $f : \Omega \to F$ une application différentiable en a, et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases de E et F respectivement. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ les fonctions coordonnées de f, définies sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}\, f(a)) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}).$$

Exemple II.26. *Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :*

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + 3y \\ xy + e^x \end{pmatrix}$$

Choix des bases :

- *Pour l'espace de départ $E = \mathbb{R}^2$: prenons la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.*
- *Pour l'espace d'arrivée $F = \mathbb{R}^2$: prenons également la base canonique $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = (1, 0)$ et $e'_2 = (0, 1)$.*

Calcul des dérivées partielles :
Les fonctions coordonnées sont $f_1(x, y) = x^2 + 3y$ et $f_2(x, y) = xy + e^x$.
Calculons les dérivées partielles au point $a = (x_0, y_0)$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 3$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y + e^x, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = x$$

3. Matrice de la différentielle :
D'après le théorème, la matrice de $\mathrm{d}f(x_0, y_0)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 3 \\ y_0 + e^{x_0} & x_0 \end{pmatrix}$$

5. Cas particulier :
Au point $a = (1, 2)$, on a :

$$\mathrm{d}f(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 + e & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $h = (3, -1)$, on obtient :

$$\mathrm{d}f(1, 2) \cdot (3, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 + e & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 3 \\ (2 + e) \cdot 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 + 3e \end{pmatrix}$$

Ce résultat peut être interprété comme l'approximation linéaire au voisinage de $(1, 2)$:

$$f(1 + 3, 2 - 1) \approx f(1, 2) + \mathrm{d}f(1, 2) \cdot (3, -1) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 + e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 + 3e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 + 4e \end{pmatrix}$$

tandis que la valeur exacte est $f(4, 1) = \begin{pmatrix} 16 \\ 4 + e^4 \end{pmatrix}$.

Corollaire II.27 (Détermination de la différentielle par les dérivées partielles)**.** *Si f est différentiable en a, ses dérivées partielles selon une base B déterminent la différentielle. Plus précisément, pour tout $h \in E$ tel que $[h]_B = (h_1, \dots, h_n)$,*

$$df(a) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} h_k \partial_k f = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les dérivées partielles et les coordonnées étant prises relativement à la base B.

Démonstration. Soit $f : \Omega \subset E \to F$ différentiable en $a \in \Omega$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
Pour tout $h \in E$, on peut écrire $h = \sum_{k=1}^{n} h_k e_k$ où $(h_1, \dots, h_n) = [h]_{\mathcal{B}}$ sont les coordonnées de h dans la base $\mathcal{B}$.
Par linéarité de la différentielle $\mathrm{d}f(a) : E \to F$ (qui est une application linéaire) :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \mathrm{d}f(a) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} h_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} h_k \, \mathrm{d}f(a) \cdot e_k$$

Or, par définition de la dérivée partielle selon la direction e_k :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot e_k = \partial_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

où $\partial_k f(a)$ est la dérivée partielle de f en a selon le k-ième vecteur de la base $\mathcal{B}$.
Ainsi, on obtient bien :

$$\mathrm{d}f(a) \cdot h = \sum_{k=1}^{n} h_k \, \partial_k f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Ceci montre que la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ est entièrement déterminée par les dérivées partielles $\partial_k f(a)$ pour $k = 1, \dots, n$. □

Interprétation géométrique
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{d}f(a))$ représente comment l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ transforme les vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

- La première colonne est l'image de e_1 : $\mathrm{d}f(a) \cdot e_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$
- La deuxième colonne est l'image de e_2 : $\mathrm{d}f(a) \cdot e_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$
- De manière générale, la k-ième colonne est $\mathrm{d}f(a) \cdot e_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$

Définition II.28 (Jacobienne d'une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$)**.** *Si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, la matrice de $df(a)$ relativement aux bases canoniques est appelée matrice jacobienne de f en a, et notée $Jf(a)$. Ainsi :*

$$Jf(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}),$$

où $f = (f_1, \dots, f_p)$.

Méthode II.29 (Montrer que f est différentiable, méthode 2)**.** *Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, étudier l'existence des dérivées partielles en a, et considérer l'application linéaire v canoniquement associée à la matrice jacobienne. Si*

$$f(a + h) - f(a) - v(h) = o(h),$$

f est différentiable en a de différentielle $df(a) = v$.

- *Adaptation immédiate dans les autres situations après avoir fixé des bases.*

Exemple II.30. *Étudier la différentiabilité en $(0,0)$ de $f:(x,y)\mapsto\sqrt{x^2+y^2}$, prolongée par 0 en 0.*
NB : en exercice, assurez-vous que trouver un DL1 de façon directe n'est pas aisé du tout !

Proposition II.31 (Différentielle d'une application constante)**.** *Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une application constante. Alors f est différentiable sur Ω, de différentielle nulle.*
Autrement dit, pour tout $a\in\Omega$, $df(a)$ est l'application linéaire nulle de E dans F.

Proposition II.32 (Différentielle d'une AL)**.** *Soit $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors f est différentiable en tout point $a\in E$, et pour tout $a\in E$,*

$$df(a)=f.$$

Ainsi, df est constante de valeur f.

Les notations dx, dy, etc, très utilisée par les physiciens notamment, peuvent être définies rigoureusement comme des cas particuliers de la proposition précédente.

Définition II.33 (Notation dx_i)**.** *Étant donné un espace E de dimension n, muni d'une base $B=(b_1,\dots,b_n)$, on note dx_i la différentielle de la projection*

$$\pi_i:\begin{array}{ccc}E&\longrightarrow&\mathbb{R}\\x&\longmapsto&x_i\end{array}$$

où x_i est la coordonnée de x selon b_i.
Ainsi, en tout $a\in E$,

$$dx_i(a)\cdot h=h_i,$$

où h_i est la coordonnée selon b_i de h sur la base B.

Remarque II.34. *L'expression de $df(a)$ en fonction des dérivées partielles se réécrit donc :*

$$df(a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,dx_i(a),$$

ou encore, sur un domaine de différentiabilité de f :

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i,$$

relation prisée des physiciens.
La notation dx_i, bien qu'adhérente au programme et utile pour justifier les notations des physiciens, n'est pas explicitement au programme.

Démonstration de la remarque
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie n, soit U un ouvert de E et soit $f:U\to\mathbb{R}$ une application différentiable en un point $a\in U$.
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Pour tout $h\in E$, on écrit

$$h=\sum_{i=1}^{n}h_ie_i,$$

où les h_i sont les composantes de h dans cette base.

1. Différentielle comme forme linéaire. La différentielle $df(a)$ est une forme linéaire sur E, donc elle est entièrement déterminée par ses valeurs sur les vecteurs de base. Par définition, la dérivée partielle selon le i-ème vecteur de base est

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a)=df(a)(e_i).$$

2. Linéarité de la différentielle. Par linéarité de $df(a)$, pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$,

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \, df(a)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) \, h_i.$$

3. Définition des formes coordonnées dx_i. On définit les formes linéaires coordonnées dx_i : $E \to \mathbb{R}$ associées à la base $(e_1, \ldots, e_n)$ par

$$dx_i(h) = h_i,$$

où h_i est la i-ème composante de h. Ces formes sont les éléments de la base duale $(dx_1, \ldots, dx_n)$ de E^* associée à la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

4. Écriture de $df(a)$ dans la base duale. L'égalité précédente devient, pour tout $h \in E$,

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) \, dx_i(h).$$

Ainsi, en tant qu'éléments de E^*, on a l'égalité

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) \, dx_i.$$

5. Cas où $E = \mathbb{R}^n$ avec la base canonique. Si $E = \mathbb{R}^n$ et si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique, alors

$$\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a),$$

et dx_i est la forme linéaire qui à $h = (h_1, \ldots, h_n)$ associe h_i. On retrouve ainsi l'écriture

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \, dx_i.$$

6. Écriture globale. Si f est différentiable sur un ouvert $U \subset E$, on peut écrire cette relation en tout point de U sous la forme

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i} \, dx_i,$$

où maintenant df et les dx_i sont vues comme des applications de U dans E^* (plus précisément comme des 1-formes différentielles sur U).

II.3 Gradient

On généralise dans cette section la notion de gradient introduite l'année dernière dans le cadre de fonctions de fonctions de deux variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans ce contexte, le gradient a été défini en un point a comme le vecteur de $\mathbb{R}^2$ formé des deux dérivées partielles en a, autrement dit des deux dérivées selon les vecteurs d'une base.
On pourrait définir le gradient de la même manière, par rapport à une base, mais c'est plus commode de le définir sans référence à une base particulière. Pour cela, on se place dans le contexte où E est un espace euclidien et $F = \mathbb{R}$, et on utilise le lemme suivant, qu'on a déjà utilisé pour justifier l'existence de l'adjoint d'un endomorphisme.