II.1 Dérivées selon un vecteur

Définition II.1 (Fonctions partielles). *Soit $f : \Omega \to F$, $a \in \Omega$, et $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. La fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ au point a et de direction $\vec{u}$, est définie, en tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $a + t\vec{u} \in \Omega$, par*

$$f_{a,\vec{u}}(t) = f(a + t\vec{u}).$$

Remarque II.2.
1. *La fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ est bien définie au voisinage de 0, car Ω est ouvert.*
2. *La flèche sur $\vec{u}$ est présente ici uniquement pour faire remarquer que c'est la structure affine naturelle de E qui est en jeu ici. Les éléments de E jouent donc un rôle double de points et de vecteurs. Les éléments en lesquels f est évalué correspondent plutôt à des points, alors que $\vec{u}$ donne une direction de translation, et doit plutôt être considéré comme un vecteur. La fonction $f_{a,\vec{u}}$ correspond plus ou moins, après reparamétrage, à la restriction de f à la droite affine passant par a et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.*

Définition II.3 (Dérivée selon un vecteur). *Soit $f : \Omega \to F$, $a \in \Omega$, et $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$.*

1. *La fonction f est dérivable selon le vecteur $\vec{u}$ si la fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ est dérivable en 0.*
2. *La dérivée de f en a selon $\vec{u}$ est alors défini par*

$$D_{\vec{u}}f(a) = f'_{a,\vec{u}}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} \in F.$$

3. *Si f est dérivable selon $\vec{u}$ en tout point a de Ω, on peut définir la fonction $D_{\vec{u}}f : \Omega \to F$.*

Remarque II.4.
1. *Dans la suite, afin d'alléger les notations, on omettra la flèche sur u, en notant simplement $D_u f(a)$.*
2. *L'existence d'une dérivée selon u en a n'implique pas l'existence de dérivées selon d'autres vecteurs non colinéaires; en revanche, si $v \neq 0$ est colinéaire à u, l'existence de $D_u f(a)$ équivaut à celle de $D_v f(a)$, et on peut relier les deux quantités.*

Exemple II.5. *Étudier l'existence des dérivées en 0 selon $u \in \mathbb{R}^2$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}(x, y).$$

Solution:
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x, y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On étudie l'existence de la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ selon un vecteur $u = (h, k) \in \mathbb{R}^2$, avec $u \neq (0, 0)$.
Par définition, la dérivée directionnelle en $(0, 0)$ selon u est :

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th, tk)}{t}$$

Par définition de la dérivée directionnelle $u \neq (0, 0)$ (c'est-à-dire $h \neq 0$ ou $k \neq 0$).
Pour $t \neq 0$, on a $f(th, tk) = 1$ puisque $(th, tk) \neq (0, 0)$ lorsque $u \neq (0, 0)$. Ainsi :

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$$

Cette limite n'existe pas car :

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$$

Donc la dérivée directionnelle selon tout vecteur non nul n'existe pas (même pas à l'infini, car les limites à droite et à gauche sont de signes opposés).
Conclusion : *La fonction f n'admet de dérivée directionnelle en $(0,0)$ dans aucune direction non nulle. En particulier, elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.*

Proposition II.6 (Linéarité de D par rapport à u sur chaque droite)**.** *Soit $u \in E\setminus\{0\}$ et $f : \Omega \to F$ dérivable en $a \in \Omega$ selon u. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors f est dérivable en a selon λu et*

$$D_{\lambda u} f(a) = \lambda D_u f(a).$$

Éléments de preuve. Revenir à la définition par taux d'accroissement. □

Remarque II.7 (Avertissement)**.** *L'existence de toutes les dérivées directionnelles en a n'est pas suffisante pour assurer la continuité en a.*

Exemple II.8. *Étudier les dérivées directionnelles en $0_{\mathbb{R}^2}$ et la continuité de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{y} & \textit{si } y \neq 0, \\ 0 & \textit{si } y = 0. \end{cases}$$

Solution
Étudions les dérivées directionnelles en $(0,0)$ et la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \textit{si } y \neq 0, \\ 0 & \textit{si } y = 0. \end{cases}$$

Dérivées directionnelles en $(0,0)$
Soit $u = (h,k) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq (0,0)$. La dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ selon u est :

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th,tk)}{t}$$

Distinguons plusieurs cas :

1. ***Cas 1 :*** *$k = 0$ (direction horizontale).*
   Pour $k = 0$, on a $f(th,0) = 0$ par définition (car $y = 0$). Ainsi :

   $$D_{(h,0)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

   Donc f admet une dérivée directionnelle nulle selon toute direction horizontale.

2. ***Cas 2 :*** *$k \neq 0$ (direction non horizontale).*
   Pour $t \neq 0$, on a $tk \neq 0$ donc :

   $$f(th,tk) = \frac{(th)^2}{tk} = \frac{t^2h^2}{tk} = t \cdot \frac{h^2}{k}$$

   Ainsi :

   $$D_{(h,k)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot \frac{h^2}{k}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{h^2}{k} = \frac{h^2}{k}$$

   Donc f admet une dérivée directionnelle selon toute direction non horizontale, et elle vaut $\frac{h^2}{k}$.

Conclusion : *f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans toutes les directions. Cependant, ces dérivées ne dépendent pas linéairement de (h,k), car pour une direction fixée, $D_{(h,k)}f(0,0) = \frac{h^2}{k}$ est quadratique en h et non linéaire.*
Continuité en $(0,0)$ *Pour étudier la continuité de f en $(0,0)$, utilisons la caractérisation séquentielle. Considérons deux suites particulières qui convergent vers $(0,0)$:*

1. ***Première suite :*** $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

   Ainsi, $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$.

2. ***Deuxième suite :*** $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{1}{2n}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2n}} = 2$$

   Ainsi, $f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right) \to 2$ quand $n \to +\infty$.

On a donc deux suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right)$ qui convergent toutes deux vers $(0,0)$, mais telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right) = 2$$

Ces deux limites étant différentes, la fonction f ne peut pas être continue en $(0,0)$.

- *La fonction f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans toutes les directions.*
- *La fonction f n'est pas continue en $(0,0)$, comme le montre la caractérisation séquentielle avec les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2n}\right)$.*

Remarque II.9. *Cet exemple illustre qu'une fonction peut admettre des dérivées directionnelles dans toutes les directions sans être continue, et a fortiori sans être différentiable. La différentiabilité est une propriété plus forte qui requiert non seulement l'existence de dérivées directionnelles, mais aussi leur dépendance linéaire par rapport à la direction.*

Définition II.10 (Dérivées partielles dans une base)**.** *Soit $f : \Omega \to F$, $a \in \Omega$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Pour $x \in E$, on note $X = (x_1, \dots, x_n)$ son vecteur coordonnées.*

1. *Soit $k \in [1, n]$. La k-ième dérivée partielle de f dans la base B est la dérivée de f selon la direction b_k en a, et est notée $\partial_{B,k} f(a)$, ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base utilisée, simplement $\partial_k f(a)$. Ainsi*

$$\partial_k f(a) = \partial_{B,k} f(a) = D_{b_k} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tb_k) - f(a)}{t}.$$

2. *Si f admet une k-ième dérivée partielle dans la base B en tout point de Ω, cela définit une application $\partial_k f : \Omega \to F$.*

Remarque II.11 (Identification à une fonction de plusieurs variables)**.** *Soit $f : \Omega \to F$ et $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E. Pour $x \in \Omega$, on note $[x]_B = (x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées relativement à la base B. On note*

$$\tilde{\Omega} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid \sum_{k=1}^{n} x_k b_k \in \Omega \right\}.$$

Alors $\tilde{\Omega}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et on peut identifier la fonction f à la fonction $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \to F$ définie par

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) = f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k \right).$$

On obtient facilement, du fait de la possibilité de choisir la norme qu'on veut (en dimension finie) et donc notamment par exemple la norme $\| \cdot \|_{B,\infty}$ que :

- *f est continue en x ssi $\tilde{f}$ est continue en $[x]_B$;*
- *f admet en x une dérivée partielle selon b_k si $\tilde{f}$ admet en $[x]_B$ une dérivée partielle selon e_k (vecteur de la base canonique), et alors*

$$D_{b_k}(f)(a) = D_{e_k}(\tilde{f})(a).$$

Lorsque Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ la k-ième dérivée partielle par rapport à la base canonique. Ainsi, pour $a = (a_1, \dots, a_n)$, sous réserve d'existence,

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t}.$$

On l'appelle aussi dérivée partielle par rapport à la k-ième variable.

Proposition II.12 (Identification des dérivées partielles)**.** *Avec les notations de la remarque 16.2.10,*

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_k}(a) = D_{e_k}(f)(a) = \partial_{B,k} f(a).$$

Après avoir fixé la base B et identifié f à $\tilde{f}$, on pourra donc aussi identifier la k-ième dérivée partielles par rapport à la base B à la dérivée partielle par rapport à la k-ième variable de $\tilde{f}$, et on s'autorisera à écrire, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la base :

$$\partial_k f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Par ailleurs, il arrive souvent, dans le cadre d'une application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (situation à laquelle on se ramène par choix de bases), de travailler coordonnée par coordonnée. Dans ce cadre, on est ramené au calcul de dérivées partielles d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Proposition II.13 (Expression de la dérivée partielle d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, qu'on écrit $f = (f_1, \ldots, f_p)$. Ainsi, pour tout $x \in \Omega$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_p(x)) \in \mathbb{R}^p$, et pour tout $k \in [1, p]$, $f_k : \Omega \to \mathbb{R}$. Alors f admet une dérivée partielle par rapport à la k-ième variable en a ssi c'est le cas de chacun des f_i, et dans ce cas,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a), \ldots, \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(a)\right).$$

Par ailleurs, on rappelle comment, concrètement, calculer les dérivée partielles d'une fonction dont on connaît l'expression :

Méthode II.14 (Calcul d'une dérivée partielle)**.** *Soit f une application de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (ce à quoi on peut se ramener d'après toutes les propriétés précédentes d'identification ou de travail par coordonnées). Pour calculer la dérivée partielle par rapport à x_k, on utilise les règles usuelles de calcul de la dérivée en utilisant l'expression de f, dans laquelle on dérive par rapport à la variable x_k, en considérant que toutes les autres variables sont des constantes.*

Exemple II.15. *Calculer la dérivée partielle par rapport à x de $f : (x, y, z) \mapsto (xy\ln(x+e^z), \sin(xe^z)\cos(y))$.*
***Solution**:*
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy\ln(x + e^z) \\ \sin(xe^z)\cos(y) \end{pmatrix}$$

Nous voulons calculer la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$.
1. Approche par dérivée directionnelle et taux d'accroissement
Par définition, la dérivée partielle par rapport à x est la dérivée directionnelle selon le vecteur $e_1 = (1, 0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = D_{e_1} f(x, y, z) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y, z) - f(x, y, z)}{t}$$

Pour calculer cette limite, faisons un développement limité en $t = 0$ des deux composantes.
***Développement limité de la première composante** Pour $f_1(x+t, y, z) = (x+t)y\ln((x+t)+e^z)$:*
Développons $\ln((x + t) + e^z)$ au voisinage de $t = 0$:

$$\ln((x + t) + e^z) = \ln(x + e^z + t) = \ln(x + e^z) + \ln\left(1 + \frac{t}{x + e^z}\right)$$

En utilisant le développement limité $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$ avec $u = \frac{t}{x+e^z}$:

$$\ln\left(1 + \frac{t}{x + e^z}\right) = \frac{t}{x + e^z} - \frac{t^2}{2(x + e^z)^2} + o(t^2)$$

Donc :

$$\ln((x + t) + e^z) = \ln(x + e^z) + \frac{t}{x + e^z} - \frac{t^2}{2(x + e^z)^2} + o(t^2)$$

En multipliant par $(x + t)y = xy + ty$:

$$\begin{aligned} f_1(x + t, y, z) &= (xy + ty)\left[\ln(x + e^z) + \frac{t}{x + e^z} - \frac{t^2}{2(x + e^z)^2} + o(t^2)\right] \\ &= xy\ln(x + e^z) + \frac{xyt}{x + e^z} + ty\ln(x + e^z) + o(t) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$f_1(x + t, y, z) - f_1(x, y, z) = t\left[\frac{xy}{x + e^z} + y\ln(x + e^z)\right] + o(t)$$

Développement limité de la seconde composante *Pour* $f_2(x+t,y,z) = \sin((x+t)e^z)\cos(y)$ *:*
Développons $\sin((x+t)e^z)$ *au voisinage de* $t=0$ *:*

$$\sin((x+t)e^z) = \sin(xe^z + te^z)$$

En utilisant le développement limité $\sin(a+u) = \sin a + u\cos a - \frac{u^2}{2}\sin a + o(u^2)$ *avec* $a = xe^z$ *et* $u = te^z$ *:*

$$\sin(xe^z + te^z) = \sin(xe^z) + te^z\cos(xe^z) - \frac{t^2e^{2z}}{2}\sin(xe^z) + o(t^2)$$

En multipliant par $\cos(y)$ *:*

$$f_2(x+t,y,z) = \cos(y)\sin(xe^z) + t\left[e^z\cos(y)\cos(xe^z)\right] + o(t)$$

Ainsi :

$$f_2(x+t,y,z) - f_2(x,y,z) = t\left[e^z\cos(y)\cos(xe^z)\right] + o(t)$$

2. Calcul de la limite du taux d'accroissement
En combinant les deux développements :

$$\frac{f(x+t,y,z)-f(x,y,z)}{t} = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{x+e^z} + y\ln(x+e^z) \\ e^z\cos(y)\cos(xe^z) \end{pmatrix} + o(1)$$

Quand $t \to 0$*, on obtient donc :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,y,z)-f(x,y,z)}{t} = \begin{pmatrix} \dfrac{xy}{x+e^z} + y\ln(x+e^z) \\ e^z\cos(y)\cos(xe^z) \end{pmatrix}$$

3. Vérification par dérivation usuelle
On peut vérifier ce résultat en dérivant directement chaque composante :
Pour $f_1(x,y,z) = xy\ln(x+e^z)$ *:*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = y\ln(x+e^z) + xy\cdot\frac{1}{x+e^z} = y\ln(x+e^z) + \frac{xy}{x+e^z}$$

Pour $f_2(x,y,z) = \sin(xe^z)\cos(y)$ *:*

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = e^z\cos(xe^z)\cos(y)$$

Ce qui confirme notre résultat obtenu par développement limité du taux d'accroissement.
4. Conclusion *La dérivée partielle de* f *par rapport à* x *est :*

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y\ln(x+e^z) + \dfrac{xy}{x+e^z} \\ e^z\cos(y)\cos(xe^z) \end{pmatrix}}$$

Remarque II.16 (Avertissement)**.** *L'existence des dérivées partielles par rapport à une base n'implique pas l'existence de dérivées selon toutes les directions en un point* a*.*

Exemple II.17. *Étudier les dérivées directionnelles en* $(0,0)$ *de* $f : (x,y) \mapsto \sqrt{|xy|}$*.*
Solution
Étudions les dérivées directionnelles en $(0,0)$ *de la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

1. Rappel de la définition

Soit $u = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ avec $u \neq (0, 0)$. La dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ selon u est :

$$D_u f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th, tk)}{t}$$

avec $f(0, 0) = \sqrt{|0 \cdot 0|} = 0$.

2. Calcul pour une direction générale

Pour $t \neq 0$, on a :

$$f(th, tk) = \sqrt{|(th)(tk)|} = \sqrt{|t^2 hk|} = |t|\sqrt{|hk|}$$

car $\sqrt{t^2} = |t|$.

Ainsi, le taux d'accroissement s'écrit :

$$\frac{f(th, tk)}{t} = \frac{|t|\sqrt{|hk|}}{t} = \frac{|t|}{t}\sqrt{|hk|}$$

3. Analyse selon la direction

Distinguons deux cas :

1. ***Cas 1 :*** *$hk = 0$, c'est-à-dire $h = 0$ ou $k = 0$.*

   Si $h = 0$ (direction verticale) ou $k = 0$ (direction horizontale), alors $\sqrt{|hk|} = 0$. Ainsi :

   $$D_{(h,k)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} 0 = 0$$

2. ***Cas 2 :*** *$hk \neq 0$, c'est-à-dire $h \neq 0$ et $k \neq 0$.*

   Alors $\sqrt{|hk|} > 0$ et :

   $$\frac{f(th, tk)}{t} = \frac{|t|}{t}\sqrt{|hk|} = \operatorname{sgn}(t)\sqrt{|hk|}$$

   où $\operatorname{sgn}(t)$ est le signe de t.

   Cette expression a des limites différentes à droite et à gauche :

   $$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(th, tk)}{t} = \sqrt{|hk|}$$

   $$\lim_{t\to 0^-} \frac{f(th, tk)}{t} = -\sqrt{|hk|}$$

   Puisque ces deux limites sont différentes (l'une est positive, l'autre négative), la limite bilatérale n'existe pas. Donc $D_{(h,k)} f(0, 0)$ n'existe pas.

4. Synthèse des résultats

- *Pour les directions horizontales ($k = 0$) et verticales ($h = 0$) :*

  $$D_{(h,0)} f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad D_{(0,k)} f(0,0) = 0$$

- *Pour toutes les autres directions ($h \neq 0$ et $k \neq 0$) :*

  $$D_{(h,k)} f(0,0) \text{ n'existe pas}$$

Remarque II.18. *Cependant, sous des hypothèses supplémentaires de régularité, les dérivées partielles suffisent à retrouver les dérivées directionnelles. Par exemple, dans le cas des fonctions de 2 variables, vous avez montré l'année dernière que si f est de classe C^1 au voisinage de a (dans le sens où ses deux dérivées partielles existent et sont continues au voisinage de a), alors, en notant $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$:*

- *pour tout $u = (u_x, u_y)$, $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle = u_x \frac{\partial f}{\partial x}(a) + u_y \frac{\partial f}{\partial y}(a)$,*
- *au voisinage de $a = (a_x, a_y)$, en notant $X = (x, y)$,*

$f(X) = f(a) + (x - a_x)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_y)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|X - a\|) = f(a) + \langle X - a, \nabla f(a)\rangle + o(\|X - a\|)$ *(formule de Taylor-*

II.2 Différentielles

En particulier, d'après la remarque clôturant le paragraphe précédent, les fonctions de 2 variables suffisamment régulières se comportent à première approximation comme la fonction affine

$$X \mapsto f(a) + \langle X - a, \nabla f(a)\rangle,$$

donc la partie linéaire est l'application linéaire est

$$Y \mapsto \langle Y, \nabla f(a)\rangle = D_Y f(a).$$

Ainsi, sous certaines conditions de régularité, la dérivée directionnelle en a est une application linéaire en la direction, et permet de définir un développement limité à l'ordre 1.
C'est l'existence de cette approximation linéaire qui définit la notion de différentiabilité d'une application (tout comme la dérivabilité d'une fonction d'une variable équivaut à l'existence d'un DL1).

Définition II.19 (Différentiabilité et différentielle de f)**.** *Soit $f : \Omega \to F$, et $a \in \Omega$.*

1. *On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que au voisinage de a,*
$$f(x) = f(a) + u(x - a) + o(\|x - a\|).$$
2. *Dans ce cas, l'application linéaire u est notée $df(a)$, et est appelée différentielle de f au point a, ou application linéaire tangente à f en a.*

Ainsi, la différentielle $df(a)$ est caractérisée par :

1. *sa linéarité ($df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$)*
2. *le DL $f(a + h) = f(a) + [df(a)](h) + o(\|h\|)$.*

Pour alléger les notations, on écrira souvent $o(h)$ au lieu de $o(\|h\|)$ (et de même aux ordres supérieurs), et on omettra les crochets et parenthèses en écrivant

$$[df(a)](h) = df(a) \cdot h.$$

Remarque II.20. *Attention à bien comprendre les significations des différentes parenthèses. Si f est différentiable sur tout Ω par exemple,*

$$df : \Omega \to \mathcal{L}(E, F)$$

est une fonction qui à tout point de Ω associe une application linéaire, qui est la partie linéaire de l'approximation affine de f en a. Pour tout a,

$$df(a) : E \to F$$

est donc une application linéaire, qu'on peut ensuite évaluer en $h \in E$. Nous verrons plus loin que, comme dans le cas d'une fonction de deux variables, $df(a) \cdot h$ est la dérivée directionnelle en a selon u.

Cette définition est à rapprocher de la caractérisation de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle par le DL1. D'ailleurs, cette caractérisation permet d'en déduire le rapport entre dérivée et différentielle dans le cas d'une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition II.21 (Différentielle d'une application d'une variable réelle)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors f est différentiable en a si et seulement si f est dérivable en a, et dans ce cas :*

$$df(a) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & f'(a) \cdot h \end{array}$$