I.3 Fonctions vectorielles de classe C^k

On considère toujours dans cette sous-section le cas d'une fonction $f : I \to F$ définie sur un intervalle I ouvert, et à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie. Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de F, et, pour $x \in I$,

$$[f(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable sur I, alors elle définit une fonction dérivée

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) b_k, \quad \text{i.e.} \quad [f'(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}.$$

On a encore $f' : I \to F$, et on peut donc étudier la dérivabilité de f', et ainsi de suite, comme dans le cas réel.
Si f est dérivable p fois, on note $f^{(k)}$ sa dérivée d'ordre k.

Définition I.21 (Fonction de classe C^k)**.** *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k si elle est k fois dérivable et si $f^{(k)} = I \to F$ est continue.*

Définition I.22 (Caractérisation de la classe C^k et expression de la dérivée)**.** *Avec les notations introduites ci-dessus.*

1. *f est k fois dérivable si et seulement si chaque f_i est k fois dérivable, et dans ce cas,*

$$\forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(x) \quad \textit{i.e.} \quad [f^{(k)}(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(k)}(x) \end{pmatrix};$$

2. *f est de classe C^k si et seulement si chaque f_i l'est.*

Proposition I.23 (Règles opératoires sur les fonctions de classe C^k)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F un K-e.v.n. de dimension finie. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\phi : J \to I$ et $\lambda \in K$.*

1. *Si f et g sont de classe C^k, alors $f = \lambda g$ est de classe C^k, et*

$$(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}.$$

2. *Si f et ϕ sont de classe C^k, $f \circ \phi$ est de classe C^k. Il n'y a pas de formule simple en général.*
3. *Si f est de classe C^k et $\varphi : t \mapsto at + b$, alors $(f \circ \varphi)^{(k)} = a^k (f^{(k)} \circ \varphi)$.*

Éléments de preuve. Ces propriétés sont bien connues pour les fonctions à valeurs réelles. S'y ramener en travaillant sur les coordonnées. □

II. Dérivées partielles et différentielles

On s'intéresse maintenant à la situation plus générale d'une fonction $f : \Omega \to F$, où Ω est un ouvert d'un $\mathbb{R}$-e.v.n. E de dimension finie, et F est un K-e.v.n. de dimension finie.

II.1 Dérivées selon un vecteur

Définition II.1 (Fonctions partielles). *Soit $f : \Omega \to F$, $a \in \Omega$, et $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$. La fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ au point a et de direction $\vec{u}$, est définie, en tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $a + t\vec{u} \in \Omega$, par*

$$f_{a,\vec{u}}(t) = f(a + t\vec{u}).$$

Remarque II.2.
1. *La fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ est bien définie au voisinage de 0, car Ω est ouvert.*
2. *La flèche sur $\vec{u}$ est présente ici uniquement pour faire remarquer que c'est la structure affine naturelle de E qui est en jeu ici. Les éléments de E jouent donc un rôle double de points et de vecteurs. Les éléments en lesquels f est évalué correspondent plutôt à des points, alors que $\vec{u}$ donne une direction de translation, et doit plutôt être considéré comme un vecteur. La fonction $f_{a,\vec{u}}$ correspond plus ou moins, après reparamétrage, à la restriction de f à la droite affine passant par a et dirigée par le vecteur $\vec{u}$.*

Définition II.3 (Dérivée selon un vecteur). *Soit $f : \Omega \to F$, $a \in \Omega$, et $\vec{u} \in E \setminus \{0\}$.*

1. *La fonction f est dérivable selon le vecteur $\vec{u}$ si la fonction partielle $f_{a,\vec{u}}$ est dérivable en 0.*
2. *La dérivée de f en a selon $\vec{u}$ est alors défini par*

$$D_{\vec{u}}f(a) = f'_{a,\vec{u}}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} \in F.$$

3. *Si f est dérivable selon $\vec{u}$ en tout point a de Ω, on peut définir la fonction $D_{\vec{u}}f : \Omega \to F$.*

Remarque II.4.
1. *Dans la suite, afin d'alléger les notations, on omettra la flèche sur u, en notant simplement $D_u f(a)$.*
2. *L'existence d'une dérivée selon u en a n'implique pas l'existence de dérivées selon d'autres vecteurs non colinéaires; en revanche, si $v \neq 0$ est colinéaire à u, l'existence de $D_u f(a)$ équivaut à celle de $D_v f(a)$, et on peut relier les deux quantités.*

Exemple II.5. *Étudier l'existence des dérivées en 0 selon $u \in \mathbb{R}^2$ de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}(x, y).$$

Solution:
La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x, y) = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On étudie l'existence de la dérivée directionnelle de f en $(0, 0)$ selon un vecteur $u = (h, k) \in \mathbb{R}^2$, avec $u \neq (0, 0)$.
Par définition, la dérivée directionnelle en $(0, 0)$ selon u est :

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(th, tk)}{t}$$

Par définition de la dérivée directionnelle $u \neq (0, 0)$ (c'est-à-dire $h \neq 0$ ou $k \neq 0$).
Pour $t \neq 0$, on a $f(th, tk) = 1$ puisque $(th, tk) \neq (0, 0)$ lorsque $u \neq (0, 0)$. Ainsi :

$$D_u f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{1 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}$$