I.2 Dérivation de fonctions vectorielles d'une variable réelle

Dans cette sous-section, on suppose que $E = \mathbb{R}$ et $I \subset E$ est un intervalle ouvert. On considère donc $f : I \to F$ une fonction d'une variable réelle à valeurs dans E.

Définition I.8 (Fonction dérivable en a)**.** *Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement*

$$\tau_{x_0} f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque x tend vers a. Le vecteur dérivé en a est alors défini par :

$$f'(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La deuxième limite est prise en considérant $h \in I - x_0 = \{x - x_0, x \in I\}$. Ainsi, si x_0 est la borne inférieure de I, il s'agit d'une limite lorsque h tend vers 0^+.

Définition I.9 (Fonction dérivable sur I, fonction dérivée)**.** *Soit $f : I \to F$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée $f' : I \to F$ par :*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Exemple I.10.

1. *Dérivée de $f : t \mapsto tX_0$, $X_0 \in K$.*
2. *Plus généralement, dérivée de $f : t \mapsto g(t)X_0$, $g : I \to \mathbb{R}$ étant une fonction dérivable en a, et X_0 un vecteur de F.*
3. *Dérivée de $t \mapsto e^{1/t}$.*

Proposition I.11 (Caractérisation de la dérivabilité par les coordonnées)**.** *Soit $f : I \to F$, $x_0 \in I$, et B une base de F. On note, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i,$$

la décomposition de f suivant ses composantes sur la base B. Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. *f est dérivable en x_0;*
2. *pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable en x_0.*

Dans ce cas, on a

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) b_i.$$

Éléments de preuve. Former le taux d'accroissement coordonnée par coordonnée, et utiliser la caractéristique similaire pour les limites. □

La caractérisation par les coordonnées permet de montrer qu'en définissant la dérivabilité à gauche et à droite comme dans le cas d'une fonction réelle, et en utilisant la caractérisation de la dérivée par les dérivées à gauche et à droite sur chacune de coordonnée, cela permet d'obtenir une caractérisation similaire dans le cas vectoriel.

Corollaire I.12 (Opérations sur les dérivées)**.** *Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et F un e.v.n. de dimension finie.*

1. *La dérivation est linéaire : si $f, g : I \to F$ et $\lambda \in K$, alors si f et g sont dérivables en $a \in I$, $\lambda f + g$ aussi, de dérivée*
$$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a).$$
2. *Si $\phi : J \to I$ est une fonction réelle dérivable, et $f : I \to F$ une fonction vectorielle dérivable, alors*
$$\forall t \in J, \quad (f \circ \phi)'(t) = f' \circ \phi(t) \cdot \phi'(t).$$

Éléments de preuve. Voir coordonnées par coordonnées. □

Corollaire I.13 (Dérivabilité à gauche, à droite). *Soit $x_0 \in I$ et $f : I \to F$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.*

Corollaire I.14 (Dérivable implique continu). *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Éléments de preuve. La caractérisation précédente nous ramène au cas des fonctions d'une variable. On peut aussi utiliser directement la propriété suivante (DL à l'ordre 1, qu'on peut ensuite restreindre à l'ordre 0). □

Proposition I.15 (Caractérisation de la dérivabilité par DL à l'ordre 1). *Soit $f : I \to F$ et $x_0 \in I$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est dérivable en x_0;*
2. *il existe A et B dans F tels que $f(x_0 + h) =_{h\to 0} A + hB + o(h)$.*

Éléments de preuve. Caractérisation de o par quotient, puisque t ne s'annule pas au voisinage épointé de 0. □

On donne une première conséquence, qui est plutôt un exemple, suffisamment important pour qu'il soit un résultat du cours (il servira pour l'étude des équations différentielles).

Corollaire I.16 (Dérivée de $t \mapsto \exp(At)$). *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. La fonction $f : t \mapsto \exp(At)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et*
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = A \exp(At).$$

Une autre conséquence de la caractérisation par les DL est l'interprétation du vecteur dérivé en terme d'approximation de la trajectoire.

Corollaire I.17 (Tangente à la trajectoire). *Soit $f : I \to F$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$. Alors la droite affine $f(x_0) + \mathbb{R}f'(x_0)$ est tangente à la trajectoire (dans le sens où c'est la droite qui approche au mieux la trajectoire au voisinage de $f(x_0)$).*

Remarque I.18 (Interprétation cinétique de la dérivée). *Si f représente la trajectoire d'un point dans F, et si f est dérivable en x_0 :*

- *$\|f'(x_0)\|_F$ est la vitesse instantanée du point (dépendant de la norme choisie sur F)*
- *le vecteur $f'(x_0)$ est tangent à la trajectoire, et indique le sens de déplacement.*

Exemple I.19. *Décrire la trajectoire, et la vitesse instantanée d'un point, dont la position est définie pour $t \in \mathbb{R}_+$ par*
$$f(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Théorème I.20 (Caractérisation des fonctions constantes). *Soit $f : I \to F$, dérivable sur l'intervalle I, et à valeurs dans l'e.v.n. de dimension finie F. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. *f est constante sur I*
2. *$f' = 0$ sur I.*

Éléments de preuve. Voir dans une base. □

I.3 Fonctions vectorielles de classe C^k

On considère toujours dans cette sous-section le cas d'une fonction $f : I \to F$ définie sur un intervalle I ouvert, et à valeurs dans un e.v.n. F de dimension finie. Soit $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de F, et, pour $x \in I$,

$$[f(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable sur I, alors elle définit une fonction dérivée

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) b_k, \quad \text{i.e.} \quad [f'(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{pmatrix}.$$

On a encore $f' : I \to F$, et on peut donc étudier la dérivabilité de f', et ainsi de suite, comme dans le cas réel.
Si f est dérivable p fois, on note $f^{(k)}$ sa dérivée d'ordre k.

Définition I.21 (Fonction de classe C^k)**.** *La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^k si elle est k fois dérivable et si $f^{(k)} = I \to F$ est continue.*

Définition I.22 (Caractérisation de la classe C^k et expression de la dérivée)**.** *Avec les notations introduites ci-dessus.*

1. *f est k fois dérivable si et seulement si chaque f_i est k fois dérivable, et dans ce cas,*

$$\forall x \in I, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(x) \quad \textit{i.e.} \quad [f^{(k)}(x)]_B = \begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f_n^{(k)}(x) \end{pmatrix};$$

2. *f est de classe C^k si et seulement si chaque f_i l'est.*

Proposition I.23 (Règles opératoires sur les fonctions de classe C^k)**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et F un K-e.v.n. de dimension finie. Soit $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\phi : J \to I$ et $\lambda \in K$.*

1. *Si f et g sont de classe C^k, alors $f = \lambda g$ est de classe C^k, et*

$$(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}.$$

2. *Si f et ϕ sont de classe C^k, $f \circ \phi$ est de classe C^k. Il n'y a pas de formule simple en général.*
3. *Si f est de classe C^k et $\varphi : t \mapsto at + b$, alors $(f \circ \varphi)^{(k)} = a^k (f^{(k)} \circ \varphi)$.*

Éléments de preuve. Ces propriétés sont bien connues pour les fonctions à valeurs réelles. S'y ramener en travaillant sur les coordonnées. □

II. Dérivées partielles et différentielles

On s'intéresse maintenant à la situation plus générale d'une fonction $f : \Omega \to F$, où Ω est un ouvert d'un $\mathbb{R}$-e.v.n. E de dimension finie, et F est un K-e.v.n. de dimension finie.