I. Rappels sur les fonctions vectorielles

I.1 Extension des notations o et O

Dans cette sous-section, E est un $\mathbb{R}$-e.v.n. de dimension finie, F est un K-e.v.n. de dimension finie, et $D \subset E$ est une partie quelconque de E.

Définition I.1 (Extension des notations o et O)**.** *Soit f est une application de D dans F et $g : D \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D$. On dira que*

- $f(x) = \underset{x_0}{} o(g(x))$ *s'il existe $\alpha : D \to F$ tel que*

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad \forall x \in V \cap D, \quad f(x) = g(x)\alpha(x),$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0;$$

- $f(x) = \underset{x_0}{} O(g(x))$ *s'il existe $\alpha : D \to F$ tel que*

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0), \quad \forall x \in V \cap D, \quad f(x) = g(x)\alpha(x),$$

et α bornée sur $V \cap D$.

Remarque I.2. *Le terme d'erreur sera toujours contrôlé par une fonction à valeur dans $\mathbb{R}$, et non une fonction vectorielle.*

Proposition I.3 (Caractérisation de o et O par les coordonnées)**.** *Soit $f : I \to F$ et $g : I \to \mathbb{R}$, et $B = (b_1, \dots, b_n)$ une base de F, et pour tout $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i.$$

Alors

- $f(x) = \underset{x_0}{} o(g(x))$ *si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) = \underset{x_0}{} o(g_i(x))$;*
- $f(x) = \underset{x_0}{} O(g(x))$ *si et seulement si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i(x) = \underset{x_0}{} O(g_i(x))$.*

Éléments de preuve. Écrire α avec ses coordonnées, et utiliser la norme $\| \cdot \|_{B,\infty}$. □

Exercice I.4. *1.* $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \ln(t) \end{pmatrix} =_{+\infty} o(t^3)$*;*

2. $\begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ \frac{1}{1+t} \\ \arctan t \end{pmatrix} =_0 \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} + O(t^2)$*;*

3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$*,* $e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} + o(\|A\|^n)$ *quand* $A \to 0$*.*

Solution:

1. *Pour montrer que c'est un* $o(t^3)$ *quand* $t \to +\infty$*, vérifions chaque composante :*
   - $\frac{t}{t^3} = \frac{1}{t^2} \to 0$
   - $\frac{t^2}{t^3} = \frac{1}{t} \to 0$
   - $\frac{\ln(t)}{t^3} \to 0$ *(par croissance comparée)*

   Donc $\begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \ln(t) \end{pmatrix} =_{+\infty} o(t^3)$*.*

2. *Développons chaque composante au voisinage de 0 :*

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + O(t^3)$$
$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5) = t + O(t^3)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + O(t^3)$$
$$\arctan t = t - \frac{t^3}{3} + O(t^5) = t + O(t^3)$$

   Ainsi :

$$\begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ \frac{1}{1+t} \\ \arctan t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} + O(t^3) \\ O(t^3) \\ t^2 + O(t^3) \\ O(t^3) \end{pmatrix}$$

   Le vecteur reste est un $O(t^2)$*, donc :*

$$\begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ \frac{1}{1+t} \\ \arctan t \end{pmatrix} =_0 \begin{pmatrix} 1+t \\ t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix} + O(t^2)$$

3. *Pour* $A \in M_n(\mathbb{C})$*, considérons la série de l'exponentielle :*

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

   On peut écrire :

$$e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire une norme sous-multiplicative : $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$). Majorons le reste :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Utilisons maintenant l'exponentielle réelle :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

Or, on sait que pour $x \to 0$,

$$e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = o(x^n)$$

Donc quand $\|A\| \to 0$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = o(\|A\|^n)$$

Ce qui implique que :

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| = o(\|A\|^n)$$

Ainsi, quand $A \to 0$:

$$e^A = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} + o(\|A\|^n)$$

On en déduit, pour $t \in \mathbb{R}$: $e^{At} = I_n + tA + o(t)$.

La situation la plus fréquente sera le cas d'un terme d'erreur en $\|x\|^\alpha$, x étant une variable de l'e.v.n. E de dimension finie.

Lemme I.5 (Invariance vis-à-vis de la norme en dimension finie)**.** *Soit E de dimension finie et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ deux normes quelconques sur E. Soit $D \subset E$ et $f : E \to F$, et $x_0 \in F$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(\|x\|_1^\alpha) \iff f(x) = \underset{x \to x_0}{o}(\|x\|_2^\alpha),$$

et

$$f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(\|x\|_1^\alpha) \iff f(x) = \underset{x \to x_0}{O}(\|x\|_2^\alpha).$$

Pour $h \in E$, on trouve parfois par abus la notation $o(h)$ à la place de $o(\|h\|)$, et de même pour $O(h)$, dans le but d'alléger un peu les notations.
Lorsque $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut former des quotients, et on retrouve la caractérisation usuelle, généralisée au cas d'une variable vectorielle.

Proposition I.6 (Caractérisation de o par le quotient)**.** *Si $g : D \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas au voisinage de x_0, les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $f(x) = o(g(x))$;
2. $\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$.

Proposition I.7 (Caractérisation de O par le quotient)**.** *Si $g : D \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas au voisinage épointé de x_0, les propositions suivantes sont équivalentes:*

1. $f(x) = O(g(x))$;
2. $\frac{f(x)}{g(x)}$ *est bornée au voisinage de* x_0.

Les propriétés opératoires sur les o et O sont les mêmes que dans le cas réel (sommation, transitivité etc).

I.2 Dérivation de fonctions vectorielles d'une variable réelle

Dans cette sous-section, on suppose que $E = \mathbb{R}$ et $I \subset E$ est un intervalle ouvert. On considère donc $f : I \to F$ une fonction d'une variable réelle à valeurs dans E.

Définition I.8 (Fonction dérivable en a)**.** *Soit $f : I \to F$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement*

$$\tau_{x_0} f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque x tend vers a. Le vecteur dérivé en a est alors défini par :

$$f'(a) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

La deuxième limite est prise en considérant $h \in I - x_0 = \{x - x_0, x \in I\}$. Ainsi, si x_0 est la borne inférieure de I, il s'agit d'une limite lorsque h tend vers 0^+.

Définition I.9 (Fonction dérivable sur I, fonction dérivée)**.** *Soit $f : I \to F$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée $f' : I \to F$ par :*

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Exemple I.10.

1. *Dérivée de $f : t \mapsto tX_0$, $X_0 \in K$.*
2. *Plus généralement, dérivée de $f : t \mapsto g(t)X_0$, $g : I \to \mathbb{R}$ étant une fonction dérivable en a, et X_0 un vecteur de F.*
3. *Dérivée de $t \mapsto e^{1/t}$.*

Proposition I.11 (Caractérisation de la dérivabilité par les coordonnées)**.** *Soit $f : I \to F$, $x_0 \in I$, et B une base de F. On note, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) b_i,$$

la décomposition de f suivant ses composantes sur la base B. Les propositions suivantes sont équivalentes:

1. *f est dérivable en x_0;*
2. *pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est dérivable en x_0.*

Dans ce cas, on a

$$f'(x_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x_0) b_i.$$

Éléments de preuve. Former le taux d'accroissement coordonnée par coordonnée, et utiliser la caractéristique similaire pour les limites. □

La caractérisation par les coordonnées permet de montrer qu'en définissant la dérivabilité à gauche et à droite comme dans le cas d'une fonction réelle, et en utilisant la caractérisation de la dérivée par les dérivées à gauche et à droite sur chacune de coordonnée, cela permet d'obtenir une caractérisation similaire dans le cas vectoriel.

Corollaire I.12 (Opérations sur les dérivées)**.** *Soit I et J des intervalles de $\mathbb{R}$, et F un e.v.n. de dimension finie.*