Éléments de preuve. Se comprend bien par l'expérience. Assez immédiat par fonctions génératrices. □

Corollaire III.30 (Somme de variables de Bernoulli indépendantes). *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$.*

Proposition III.31 (Stabilité des lois de Poisson). *Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*

Éléments de preuve. Même principe de calcul. □

IV. Inégalités probabilistes

Pour terminer, nous généralisons au cas de variables discrètes les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev vues en MPSI pour les variables finies.

IV.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème IV.1 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^1. Alors, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Éléments de preuve. Par croissance de $\mathbb{E}$, en remarquant que $X \geqslant a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$. □

Corollaire IV.2 (Réexpression quadratique de l'inégalité de Markov dans le cas L^2). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Éléments de preuve. Si $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$, appliquer ce qui précède à X^2. Et sinon ? □

Théorème IV.3 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit Y une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, d'espérance m et de variance σ^2. Alors :*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\big(|Y - m| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Éléments de preuve. Inégalité de Markov quadratique appliquée à $Y - m$. □

IV.2 Loi faible des grands nombres

On a déjà vu la notion de convergence en loi de X_n vers X. Cette notion de convergence ne dit rien en terme de réalisation des variables, mais juste sur les probabilités.
Une notion plus probabiliste de convergence mesure à quel point deux variables ont tendance à prendre des valeurs proches l'une de l'autre.

Définition IV.4 (Convergence en probabilités). *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires L^1 et X une variable L^1. On dit que (X_n) converge en probabilités vers X si*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$

Un des exemples les plus importants de convergence en probabilité est celle qui résulte du calcul de la moyenne obtenue lors d'une répétition de variables aléatoires.

Théorème IV.5 (Loi faible des grands nombres, HP)**.** *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles discrètes L^2, i.i.d, d'espérance m et de variance σ^2. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m. Plus précisément :

$$\forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big(|Z_n - m| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Éléments de preuve**.** Inégalité de B-T appliquée à Z_n dont on sait facilement déterminer l'espérance et la variance. □

Exemple IV.6 (Théorème d'or de Bernoulli)**.** *1. La loi faible des grands nombres utilisée avec une suite de variables de Bernoulli i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$, avec p non connu, on obtient*

$$\forall \epsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\big(|Z_n - p| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Le fait qu'on puisse faire cette majoration indépendamment de p permet d'estimer la valeur de p.
2. On tire 1000 fois à pile ou face avec une pièce déséquilibrée dont la probabilité d'obtention de Pile est p. On obtient 570 fois Pile. Donner un intervalle I tel que la probabilité que $p \in I$ soit supérieure à $0,9$.