Éléments de preuve. Se comprend bien par l'expérience. Assez immédiat par fonctions génératrices. □

Corollaire III.30 (Somme de variables de Bernoulli indépendantes). *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$.*

Proposition III.31 (Stabilité des lois de Poisson). *Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*

Éléments de preuve. Même principe de calcul. □

IV. Inégalités probabilistes

Pour terminer, nous généralisons au cas de variables discrètes les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev vues en MPSI pour les variables finies.

IV.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème IV.1 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^1. Alors, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Éléments de preuve. Par croissance de $\mathbb{E}$, en remarquant que $X \geqslant a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$. □

Corollaire IV.2 (Réexpression quadratique de l'inégalité de Markov dans le cas L^2). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Éléments de preuve. Si $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$, appliquer ce qui précède à X^2. Et sinon ? □

Théorème IV.3 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit Y une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, d'espérance m et de variance σ^2. Alors :*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\big(|Y - m| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Éléments de preuve. Inégalité de Markov quadratique appliquée à $Y - m$. □

IV.2 Loi faible des grands nombres

On a déjà vu la notion de convergence en loi de X_n vers X. Cette notion de convergence ne dit rien en terme de réalisation des variables, mais juste sur les probabilités.
Une notion plus probabiliste de convergence mesure à quel point deux variables ont tendance à prendre des valeurs proches l'une de l'autre.

Définition IV.4 (Convergence en probabilités). *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires L^1 et X une variable L^1. On dit que (X_n) converge en probabilités vers X si*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$