Et par notre motivation même :

Proposition III.23 (Expérience-type associée à une loi géométrique)**.** *Soit X le temps d'attente du premier succès lors d'une répétition infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Proposition III.24 (Fonction génératrice, espérance et variance d'une loi géométrique)**.** *Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors*

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Éléments de preuve. On présente le calcul de l'espérance de X par fonction génératrice et par calcul direct. □

III.4 Loi de Poisson

Définition III.25 (Loi de Poisson)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et X une v.a.r. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :*

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'après les résultats sur les séries exponentielles, cela définit bien une loi de probabilité.

De plus :

Proposition III.26 (Espérance et variance d'une loi de Poisson)**.** *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}, \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Proposition III.27 (Limite en loi de variables binomiales)**.** *Soit (X_n) une suite de variables binomiales de paramètres (n, p_n), telles que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque III.28 (15.3.28)**.** *Pour cette raison, la loi de Poisson modélise le nombre de succès lorsque le succès est un événement rare (i.e. de petite probabilité) et que la population est très grande.*
Une situation typique est l'affluence (à un magasin, à un parc d'attraction etc.), lors d'un laps de temps donné (par exemple une journée), dans une population très grande. Chaque individu de la population a une probabilité p très faible d'aller à ce lieu lors d'une journée donnée, et la population N est très grande. Ainsi, la loi $B(N, p)$ représentant l'affluence au lieu donné pendant la période donnée est assez voisine de la loi $\mathcal{P}(Np)$. Ainsi, en posant $\lambda = Np$, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne modélisation de l'affluence.

III.5 Stabilités (HP classique)

Par stabilité d'une loi classique, on entend la chose suivante : si X et Y suivent un certain type de loi et sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi de même type (avec des paramètres éventuellement différents). Nous énonçons ici deux propriétés de stabilité.

Proposition III.29 (Stabilité des lois binomiales)**.** *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in]0, 1[$. Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim B(n + m, p)$.*

Éléments de preuve. Se comprend bien par l'expérience. Assez immédiat par fonctions génératrices. □

Corollaire III.30 (Somme de variables de Bernoulli indépendantes). *Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Alors $X_1 + \cdots + X_n \sim B(n,p)$.*

Proposition III.31 (Stabilité des lois de Poisson). *Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}_+)^2$. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.*

Éléments de preuve. Même principe de calcul. □

IV. Inégalités probabilistes

Pour terminer, nous généralisons au cas de variables discrètes les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev vues en MPSI pour les variables finies.

IV.1 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Théorème IV.1 (Inégalité de Markov). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^1. Alors, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Éléments de preuve. Par croissance de $\mathbb{E}$, en remarquant que $X \geqslant a\mathbb{1}_{\{X \geqslant a\}}$. □

Corollaire IV.2 (Réexpression quadratique de l'inégalité de Markov dans le cas L^2). *Soit X une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors*

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Éléments de preuve. Si $\mathbb{E}(X^2) \neq 0$, appliquer ce qui précède à X^2. Et sinon ? □

Théorème IV.3 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev). *Soit Y une variable aléatoire réelle discrète dans L^2, d'espérance m et de variance σ^2. Alors :*

$$\forall \epsilon > 0, \mathbb{P}\big(|Y - m| \geqslant \epsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}.$$

Éléments de preuve. Inégalité de Markov quadratique appliquée à $Y - m$. □

IV.2 Loi faible des grands nombres

On a déjà vu la notion de convergence en loi de X_n vers X. Cette notion de convergence ne dit rien en terme de réalisation des variables, mais juste sur les probabilités.
Une notion plus probabiliste de convergence mesure à quel point deux variables ont tendance à prendre des valeurs proches l'une de l'autre.

Définition IV.4 (Convergence en probabilités). *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires L^1 et X une variable L^1. On dit que (X_n) converge en probabilités vers X si*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geqslant \epsilon) = 0.$$