Et par notre motivation même :

Proposition III.23 (Expérience-type associée à une loi géométrique)**.** *Soit X le temps d'attente du premier succès lors d'une répétition infinie d'expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. Alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Proposition III.24 (Fonction génératrice, espérance et variance d'une loi géométrique)**.** *Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$. Alors*

$$\forall t \in]-\frac{1}{q}, \frac{1}{q}[, G_X(t) = \frac{pt}{1-qt}, \qquad \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \qquad \textit{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Éléments de preuve. On présente le calcul de l'espérance de X par fonction génératrice et par calcul direct. □

III.4 Loi de Poisson

Définition III.25 (Loi de Poisson)**.** *Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et X une v.a.r. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, si :*

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'après les résultats sur les séries exponentielles, cela définit bien une loi de probabilité.

De plus :

Proposition III.26 (Espérance et variance d'une loi de Poisson)**.** *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Alors*

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}, \qquad \mathbb{E}(X) = \lambda \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Proposition III.27 (Limite en loi de variables binomiales)**.** *Soit (X_n) une suite de variables binomiales de paramètres (n, p_n), telles que $p_n \sim \frac{\lambda}{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On dit que la suite (X_n) converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ.

Remarque III.28 (15.3.28)**.** *Pour cette raison, la loi de Poisson modélise le nombre de succès lorsque le succès est un événement rare (i.e. de petite probabilité) et que la population est très grande.*
Une situation typique est l'affluence (à un magasin, à un parc d'attraction etc.), lors d'un laps de temps donné (par exemple une journée), dans une population très grande. Chaque individu de la population a une probabilité p très faible d'aller à ce lieu lors d'une journée donnée, et la population N est très grande. Ainsi, la loi $B(N, p)$ représentant l'affluence au lieu donné pendant la période donnée est assez voisine de la loi $\mathcal{P}(Np)$. Ainsi, en posant $\lambda = Np$, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ est une bonne modélisation de l'affluence.

III.5 Stabilités (HP classique)

Par stabilité d'une loi classique, on entend la chose suivante : si X et Y suivent un certain type de loi et sont indépendantes, alors $X + Y$ suit une loi de même type (avec des paramètres éventuellement différents). Nous énonçons ici deux propriétés de stabilité.

Proposition III.29 (Stabilité des lois binomiales)**.** *Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $p \in]0, 1[$. Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim B(n + m, p)$.*